# 7 - Domácí cvičení č. 7

**Příklad 7.1.** K matici $\mathbf{A}$ určete Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ a matici $\mathbf{T}$. Ověřte, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT^{-1}}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & -3 \\ 17 & 13 & -9 \\ 18 & 9 & -4 \end{bmatrix}$, 2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -46 & -44 \\ -10 & 7 & 20 \\ 1 & 2 & -20 \end{bmatrix}$,

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 13 & -10 \\ -67 & -42 & 31 \\ -38 & -23 & 16 \end{bmatrix}$, 4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 18 & 9 & -7 \\ -60 & -33 & 28 \\ -45 & -27 & 24 \end{bmatrix}$.

**Příklad 7.2.** K matici $\mathbf{A}$ určete Jordanův kanonický tvar $\mathbf{J}$ a matici $\mathbf{T}$. Ověřte, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TJT^{-1}}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & -9 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & -9 & -6 & 4 \end{bmatrix}$,

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 10 \end{bmatrix}$. 6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -11 & -7 & 5 \\ 16 & -18 & -11 & 9 \\ -3 & 4 & 2 & -3 \\ 12 & -13 & -8 & 6 \end{bmatrix}$, 8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$,

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

**Příklad 7.3.** Je dán lineární operátor $L\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ předpisem

$$L([a,b,c]^T) = [2a - 50b - 2c, -10a + 7b + 20c, c]^T.$$

a) Určete vlastní čísla operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru $L$ ve standardní bázi $e_1 = [1,0,0]^T$, $e_2 = [0,1,0]^T$, $e_3 = [0,0,1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_3$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ operátoru $L$ v bázi $b_1 = [1,1,3]^T$, $b_2 = [1,3,1]^T$, $b_3 = [3,1,1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_3$.

**Příklad 7.4.** Je dán lineární operátor $L\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ předpisem

$$L(ax^2 + bx + c) = (-2a + 5b + 4c)x^2 + (5a - 3b - 5c)x + (-4a + 5b + 6c).$$

a) Určete vlastní čísla operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru $L$ ve standardní bázi $e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$ prostoru $\mathcal{P}_2$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ operátoru $L$ v bázi $q_1 = x^2 + x + 1$, $q_2 = 2x^2 + x + 1$, $q_3 = x^2 + 2x + 1$ prostoru $\mathcal{P}_2$.

**Příklad 7.5.** Je dán lineární operátor $L\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ předpisem

$$L(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3a + b - 3c - d & a + 3b - c - d \\ -2a + 2b + 2c - 2d & 2a - 2b - 2c + 4d \end{bmatrix}.$$

a) Určete vlastní čísla operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru $L$ ve standardní bázi $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ operátoru $L$ v bázi $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

**Příklad 7.6.** Je dán lineární operátor $L\colon \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ předpisem

$$L(ax + b) = (56a + 189b)x - (18a + 61b).$$

a) Určete vlastní čísla operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru $L$ ve standardní bázi $e_1 = x$, $e_2 = 1$ prostoru $\mathcal{P}_1$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ operátoru $L$ v bázi $q_1 = x - 2$, $q_2 = x + 3$ prostoru $\mathcal{P}_1$.

**Příklad 7.7.** Je dán lineární vektorový prostor

$$\mathcal{V} = \{B \in \mathcal{M}_{2,3} : BA = 0, \text{ kde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\}.$$

Dále je dán lineární operátor $L\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ předpisem

$$L(\begin{bmatrix} a & b & a + 2b \\ d & e & d + 2e \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 4a + 4b + 2d - 2e & 4a + 4b - 2d + 2e & 12a + 12b - 2d + 2e \\ 2a - 2b + 4d + 4e & -2a + 2b + 4d + 4e & -2a + 2b + 12d + 12e \end{bmatrix}.$$

a) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ operátoru $L$ v bázi $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{V}$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ operátoru $L$ v bázi $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{V}$.

**Příklad 7.8.** Je dán vektorový prostor

$\mathcal{V} = (a - b + c + d)x^3 + (a + b - c + 3d)x^2 + (-a + b + c + 3d)x + (a - b - c - 3d) : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$

Pro libovolný prvek $y \in \mathcal{V}$ je
$y = ep_1(x) + fp_2(x) + gp_3(x) = e(x^3 + x^2 - x + 1) + f(-x^3 + x^2 + x - 1) + g(x^3 - x^2 + x - 1) = (e - f + g)x^3 + (e + f - g)x^2 + (-e + f + g)x + (e - f - g)$,
kde $p_1(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $p_2(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$, $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ je báze prostoru $\mathcal{V}$.
Lineární operátor $L\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ je dán předpisem

$$L((e - f + g)x^3 + (e + f - g)x^2 + (-e + f + g)x + (e - f - g)) = (-e - 3f - 2g)x^3 + (-e + f - 6g)x^2 + (-9e + 5f - 2g)x + (9e - 5f + 2g).$$

a) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice **A** operátoru $L$ v bázi $p_1(x) = x^3 + x^2 - x + 1$, $p_2(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$, $p_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ prostoru $\mathcal{V}$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice **B** operátoru $L$ v bázi $q_1(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $q_2(x) = x^3 + x^2 + 3x - 3$, $q_3(x) = -4x^2 + 6x - 6$ prostoru $\mathcal{V}$.

b) Určete vlastní čísla lineárního operátoru $L$ jako vlastní čísla matice **C** operátoru $L$ v bázi $r_1(x) = 2x^3 - 4x + 4$, $r_2(x) = 5x^3 - x^2 + 3x - 3$, $r_3(x) = -x^3 - 5x^2 + 3x - 3$ prostoru $\mathcal{V}$.