4 - Domácí cvičení č. 4

Příklad 4.1. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathcal{P}_5$ předpisem

$\mathcal{L}([a,b,c,d]^T) = (a-b+c)x^5 + (b-c+d)x^4 + (a-c+d)x^3 + (b-d+c)x^2 + (c-a+b)x + (d-a+b).$

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete bázi a dimenzi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

(c) Rozhodněte, zda dané zobrazení je izomorfismus.

Příklad 4.2. Pro lineární zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ platí:
$\mathcal{L}([a,b,c,d]^T) = [0,0,0,0]^T$ právě tehdy, když $a-b+c+d=0$, $2a+b-c+2d=0$,
$\mathcal{L}([1,1,1,1]^T) = [2,3,4,5]^T$, $\mathcal{L}([0,0,1,0]^T) = [1,2,1,2]^T$.

(a) Určete $\mathcal{L}([2,7,8,-10]^T)$.

(b) Napište předpis zobrazení $\mathcal{L}$ pro libovolný prvek $[a,b,c,d]^T$.

(c) Určete dimenzi a bázi jádra a obrazu zobrazení $\mathcal{L}$.

Příklad 4.3. Pro lineární zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_4$ platí:
$\mathcal{L}([1,1,1,1]^T) = [2,3,4,5]^T$, $\mathcal{L}([1,-1,1,-1]^T) = [1,2,5,6]^T$, $\mathcal{L}([-1,-1,1,1]^T) = [-1,5,1,-1]^T$, $\mathcal{L}([1,1,1,-1]^T) = [-2,1,3,2]^T$.

(a) Určete $\mathcal{L}([12,0,14,-2]^T)$.

(b) Napište předpis zobrazení $\mathcal{L}$ pro libovolný prvek $[a,b,c,d]^T$.

(c) Určete dimenzi a bázi jádra a obrazu zobrazení $\mathcal{L}$.

Příklad 4.4. Pro lineární zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ platí:
$\mathcal{L}([a,b,c,d]^T) = [0,0,0]^T$ právě tehdy, když $3a+2b-c+d=0$,
$\mathcal{L}([0,0,0,1]^T) = [2,4,1]^T$.

(a) Určete $\mathcal{L}([3,3,3,3]^T)$.

(b) Napište předpis zobrazení $\mathcal{L}$ pro libovolný prvek $[a,b,c,d]^T$.

(c) Určete dimenzi a bázi jádra a obrazu zobrazení $\mathcal{L}$.

Příklad 4.5. Pro lineární zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ platí:
$\mathcal{L}(ax^2+bx+c) = [0,0,0,0,0]^T$ právě tehdy, když $a+b-3c=0$, $b+c=0$,
$\mathcal{L}(x^2+x+1) = [2,1,2,1,2]^T$, $\mathcal{L}(-x^2+x+2) = [1,1,3,1,1]^T$.

(a) Určete $\mathcal{L}(7x^2+5x+13)$.

(b) Napište předpis zobrazení $\mathcal{L}$ pro libovolný prvek ax^2+bx+c.

(c) Určete dimenzi a bázi jádra a obrazu zobrazení $\mathcal{L}$.

Příklad 4.6. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$.

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete bázi a dimenzi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

(c) Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $e_1(x), e_2(x), ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(d) Určete matici **B** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $v_1(x), v_2(x), ...$ prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(e) Určete **T** matici přechodu od báze $e_1(x), e_2(x), ...$ k bázi $v_1(x), v_2(x), ...$ prostoru $\mathcal{V}$.

(f) Určete **H** matici přechodu od báze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, ...$ k bázi $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(g) Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a+2c & b-a \\ 3b+c & 2b-c \end{bmatrix}.$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathcal{P}_2$:
$e_1(x) = x^2,\ e_2(x) = x,\ e_3(x) = 1;$
$v_1(x) = x^2 + 2x + 2,\ v_2(x) = 2x^2 + x + 2,\ v_3(x) = 2x^2 + 2x + 1.$
Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathcal{M}_{2,2}$:
$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$
$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Příklad 4.7. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$.

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete bázi a dimenzi jádra Ker$\mathcal{L}$ a obrazu Im$\mathcal{L}$.

(c) Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$, $f_1, f_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(d) Určete matici **B** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$, $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(e) Určete **T** matici přechodu od báze $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, ...$ k bázi $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ...$ prostoru $\mathcal{V}$.

(f) Určete **H** matici přechodu od báze $f_1, f_2, ...$ k bázi $u_1, u_2, ...$ prostoru $\mathcal{U}$.

(g) Ukažte, že $\mathbf{B} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$.

Řešte pro zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,3} \longrightarrow \mathbb{R}_3$, které je dáno předpisem

$$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}) = [a+d, b+e, c+f]^T.$$

Báze prostoru $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2,3}$:
$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$
$\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Báze prostoru $\mathcal{U} = \mathbb{R}_3$:
$f_1 = [1,0,0]^T,\ f_2 = [0,1,0]^T,\ f_3 = [0,0,1]^T$;
$u_1 = [1,2,1]^T,\ u_2 = [1,1,2]^T,\ u_3 = [2,1,1]^T$.

Příklad 4.8. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ předpisem

$$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a+2b-c)x^3 + (-a+2c-d)x^2 + (b+c+2d)x + (3b+2c+d).$$

(a) Ukažte, že zobrazení je lineární.

(b) Určete matici **A** lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$,
$p_1(x) = x^3+x^2+x$, $p_2(x) = x^3+x^2+1$, $p_3(x) = x^3+x+1$, $p_4(x) = x^2+x+1$ prostoru $\mathcal{P}_3$.

(c) Rozhodněte, zda dané zobrazení je izomorfismus.

Příklad 4.9. Zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{P}_2$ je dáno maticí lineárního zobrazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

v následujících bázích:
v prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$ v bázi $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
v prostoru $\mathcal{P}_2$ v bázi $q_1(x) = x^2+3x-1$, $q_2(x) = -x^2+x+3$, $q_3(x) = 3x^2-x+1$.

Napište předpis lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ pro obecnou matici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Příklad 4.10. Zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ je dáno maticí lineárního zobrazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

v následujících bázích:
v prostoru $\mathcal{P}_1$ v bázi $q_1(x) = 2x-3$, $q_2(x) = x+1$,
v prostoru $\mathbb{R}_5$ v bázi $b_1 = [1,-1,0,1,1]^T$, $b_2 = [0,1,-1,1,-1]^T$, $b_3 = [1,0,1,-1,1]^T$,
$b_4 = [1,1,1,0,-1]^T$, $b_5 = [-1,1,1,-1,0]^T$.
Napište předpis lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ pro obecný polynom $ax+b$.

Příklad 4.11. Zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ je dáno maticí lineárního zobrazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

v následujících bázích:
v prostoru $\mathbb{R}_3$ v bázi $b_1 = [1, 2, -2]^T$, $b_2 = [2, 1, -1]^T$, $b_3 = [-1, 2, 1]^T$,
v prostoru $\mathcal{P}_3$ v bázi $q_1(x) = x^2 + 3x$, $q_2(x) = x + 3$, $q_3(x) = x^2 - x + 1$.
Napište předpis lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ pro obecný prvek $[a, b, c]^T$.

Příklad 4.12. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}_4$ pro každé $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$ předpisem

$$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = [a + b + c + d, b + c + d, c + d, d]^T.$$

a) Ukažte, že zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus.

b) Určete matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$,
$u_1 = [1, 0, 0, 0]^T$, $u_2 = [0, 1, 0, 0]^T$, $u_3 = [0, 0, 1, 0]^T$, $u_4 = [0, 0, 0, 1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_4$.

c) Určete matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Označíme-li $\mathcal{L}(\mathbf{Y}) = v$ pro libovolné $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{2,2}$, $v \in \mathbb{R}_4$, potom $\mathcal{L}^{-1}(v) = \mathbf{Y}$.
Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\widehat{v} = \tilde{\mathbf{Y}}$.
$\widehat{v}$ jsou souřadnice prvku $v = [a, b, c, d]^T$ v bázi u_1, u_2, u_3, u_4 prostoru $\mathbb{R}_4$,
$\tilde{\mathbf{Y}}$ jsou souřadnice obrazu $\mathbf{Y}$ v bázi $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

d) Určete $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}^{-1}\widehat{v}$.

e) Určete prvek $\mathbf{Y}$ ze souřadnic $\tilde{\mathbf{Y}}$ v bázi $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

f) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$.

Příklad 4.13. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_4 \longrightarrow \mathbb{R}_5$ pro každé $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \in \mathcal{P}_4$ předpisem

$$\mathcal{L}(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = [a - 2d + e, -b + 2c + d, -2b + c + e, 2a + b - c, a + d - 2e]^T.$$

a) Ukažte, že zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus.

b) Určete matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$p_1(x) = x^4$, $p_2(x) = x^3$, $p_3(x) = x^2$, $p_4(x) = x$, $p_5(x) = 1$ prostoru $\mathcal{P}_4$,
$e_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$, $e_2 = [0, 1, 0, 0, 0]^T$, $e_3 = [0, 0, 1, 0, 0]^T$, $e_4 = [0, 0, 0, 1, 0]^T$, $e_5 = [0, 0, 0, 0, 1]^T$ prostoru $\mathbb{R}_5$.

c) Určete matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Označíme-li $\mathcal{L}(q) = v$ pro libovolné $q \in \mathcal{P}_4$, $v \in \mathbb{R}_5$, potom $\mathcal{L}^{-1}(v) = q$.
Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}\colon \mathbb{R}_5 \longrightarrow \mathcal{P}_4$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\widehat{v} = \tilde{q}$.
$\widehat{v}$ jsou souřadnice prvku $v = [a, b, c, d, e]^T$ v bázi e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 prostoru $\mathbb{R}_5$,
$\tilde{q}$ jsou souřadnice obrazu q v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)$ prostoru $\mathcal{P}_4$.

d) Určete $\tilde{q} = \mathbf{A}^{-1}\widehat{v}$.

e) Určete prvek q ze souřadnic $\tilde{q}$ v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x)$ prostoru $\mathcal{P}_4$.

f) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathbb{R}_5 \longrightarrow \mathcal{P}_4$.

Příklad 4.14. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ pro každé $ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2$ předpisem

$$\mathcal{L}(ax^2 + bx + c) = [a - 2b + c, a - 2c, b + c]^T.$$

a) Ukažte, že zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus.

b) Určete matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = x^2 - x + 1$, $p_3(x) = -x^2 + x + 2$ prostoru $\mathcal{P}_2$,
$v_1 = [1, 0, 1]^T$, $v_2 = [2, 1, 0]^T$, $v_3 = [0, 1, 2,]^T$ prostoru $\mathbb{R}_3$.

c) Určete matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Označíme-li $\mathcal{L}(q) = u$ pro libovolné $q \in \mathcal{P}_2$, $u \in \mathbb{R}_3$, potom $\mathcal{L}^{-1}(u) = q$.
Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\widehat{u} = \tilde{q}$.
$\widehat{u}$ jsou souřadnice prvku $u = [a, b, c]^T$ v bázi v_1, v_2, v_3 prostoru $\mathbb{R}_3$,
$\tilde{q}$ jsou souřadnice obrazu q v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ prostoru $\mathcal{P}_2$.

d) Určete $\widehat{u}$ souřadnice prvku $u = [a, b, c]^T$ v bázi v_1, v_2, v_3 prostoru $\mathbb{R}_3$.

e) Určete $\tilde{q} = \mathbf{A}^{-1}\widehat{u}$.

f) Určete prvek q ze souřadnic $\tilde{q}$ v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ prostoru $\mathcal{P}_2$.

g) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_2$.

Příklad 4.15. Je dáno zobrazení $\mathcal{L}: \mathcal{M}_{2,2} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ pro každé $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$ předpisem

$$\mathcal{L}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = (a + b)x^3 + (b + c)x^2 + (c + d)x + (a - b + d).$$

a) Ukažte, že zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus.

b) Určete matici $\mathbf{A}$ zobrazení $\mathcal{L}$ v bázích
$\mathbf{B}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$,
$p_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $p_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $p_3(x) = -x^3 - x^2 - x + 1$, $p_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ prostoru $\mathcal{P}_3$.

c) Určete matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$.

Označíme-li $\mathcal{L}(\mathbf{Y}) = q$ pro libovolné $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{2,2}$, $q \in \mathcal{P}_3$, potom $\mathcal{L}^{-1}(q) = \mathbf{Y}$.
Pro inverzní zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ pak platí: $\mathbf{A}^{-1}\widehat{q} = \tilde{\mathbf{Y}}$.
$\widehat{q}$ jsou souřadnice prvku $q = ax^3 + bx^2 + cx + d$ v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$,
$\tilde{\mathbf{Y}}$ jsou souřadnice obrazu $\mathbf{Y}$ v bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

d) Určete $\widehat{q}$ souřadnice prvku $q = ax^3 + bx^2 + cx + d$ v bázi $p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)$ prostoru $\mathcal{P}_3$.

e) Určete $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}^{-1}\widehat{q}$.

f) Určete prvek $\mathbf{Y}$ ze souřadnic $\tilde{\mathbf{Y}}$ v bázi $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$.

g) Napište předpis inverzního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$.

Příklad 4.16. Zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ je dáno maticí lineárního zobrazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

v následujících bázích:
v prostoru $\mathcal{P}_2$ v bázi $q_1(x) = x^2 + x - 1$, $q_2(x) = x^2 - x + 2$, $q_3(x) = -x^2 + 2x + 3$,
v prostoru $\mathbb{R}_3$ v bázi $b_1 = [1, 1, 0]^T$, $b_2 = [3, 0, 2]^T$, $b_3 = [0, 1, 2]^T$.

Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus. Pokud ano, napište předpis inverzního lineárního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}$ pro obecný prvek $[a, b, c]^T$.

Příklad 4.17. Zobrazení $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}_4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2,2}$ je dáno maticí lineárního zobrazení

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

v následujících bázích:
v prostoru $\mathbb{R}_4$ v bázi $b_1 = [1, -1, 2, 1]^T$, $b_2 = [2, 1, 1, -1]^T$, $b_3 = [-1, 2, 1, 1]^T$, $b_4 = [1, 1, -1, 2]^T$,
v prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$ v bázi $\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozhodněte, zda zobrazení $\mathcal{L}$ je izomorfismus. Pokud ano, napište předpis inverzního lineárního zobrazení $\mathcal{L}^{-1}$ pro obecný prvek $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.