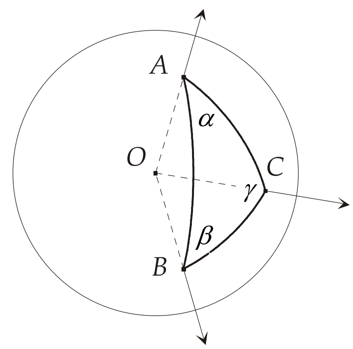
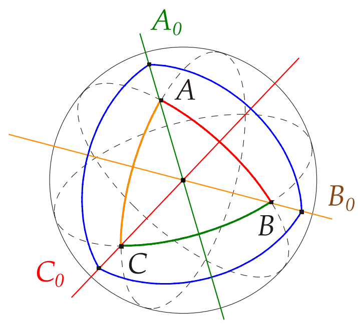
1 Sférická trigonometrie



Obrázek 1: Sférický trojúhelník

- $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0^o, 180^o)$
- Součet libovolných dvou stran je vetší než strana třetí.
- Proti stejným stranám leží stejné úhly, proti vetší straně leží vetší úhel.
- Součet všech stran je menší než 360^o, tj. $a + b + c < 360^o$.
- Součet všech úhlu je vetší než 180^o a menší než 540^o, tj. $180^o < a + b + g < 540^o$.
- Rozdíl mezi součtem všech úhlu sférického trojúhelníku a úhlem prímým se nazývá *exces* sférického trojúhelníku (nadbytek), znací se e, tj. $e = a + b$

1.1 Polární trojúhelník



Obrázek 2: Polární trojúhelník

Strany polárního trojúhelníku jsou $a_0 = 180° - \alpha, b_0 = 180° - \beta, c_0 = 180° - \gamma$; jeho úhly jsou $\alpha_0 = 180° - a, \beta_0 = 180° - b, \gamma_0 = 180° - c$

1.2 Vzorce pro sférickou trigonometrie

- Sinová věta

$$\begin{aligned} \sin c \cdot \sin\alpha &= \sin a \cdot \sin\gamma \\ \frac{\sin a}{\sin\alpha} &= \frac{\sin c}{\sin\gamma} \end{aligned}$$

- Kosinová věta pro stranu

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

- Kosinová věta pro úhel

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \quad \text{(a cyklické rovnosti).}$$

1.3 SSS

Úhly sférického trojúhelníku určíme jednoduchou úpravou z kosinové věty

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \text{(a cyklické nerovnosti).}$$

1.4 UUU

Při řešení úlohy využijeme vlastností polárních sf. trojúhelníků a dosazením do vztahů

$$a_0 = 180° - \alpha, \quad b_0 = 180° - \beta, \quad c_0 = 180° - \gamma$$

převedeme zadání UUU na úlohu typu SSS. Použitím vztahů pro polární sférické trojúhelníky je možné odvodit i podmínky určenosti sférického trojúhelníku o úhlech α, β, γ:

1.5 SUS

Známe stranu a, b, γ. Stranu c sférického trojúhelníku vypočteme z kosinové věty pro stranu

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

V okamžiku, kdy známe strany a, b, c sférického trojúhelníku můžeme přistoupit k řešení úlohy SSS, které je popsáno v části **??**.

1.6 USU

Známe stranu α, β, c. Úhel γ sférického trojúhelníku vypočteme z kosinové věty pro úhel

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

Získáme tak zadání úlohy UUU, jejíž řešení již bylo zmíněno (úlohu UUU převedeme s využitím vlastností sférických polárních trojúhelníků na úlohu SSS).

1.7 Cvičení

Vypčtěte azimut a zvdálenost z vašeho bydlište k mešitě al-Masdžid al-Haram v Mekce v Saudské arábii. Souřadnice zjistěte např. pomocí aplikace Google Earth.

2 Loxodroma a ortodroma

2.1 Ortodroma

Ortodroma (řecky orthos - přímý, dromos - cesta) je nejkratší spojnice dvou bodů na kulové ploše (např. povrchu Země). Tvoří ji kratší oblouk hlavní kružnice (její střed splývá se středem Země).

Azimut ortodromy (dle sfér. trig):

$$\tan A_1 2 = \frac{\sin(\Delta V) \cdot \cos U_2}{\sin U_2 \cdot \cos U_1 - \cos U_2 \cdot \sin U_1 \cdot \cos \Delta V}$$

Délka ortodormy:

$$\cos \sigma_1 2 = \sin U_1 \cdot \sin U_2 + \cos U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \cos \Delta V$$

2.2 Loxodroma

Loxodroma - křivka na referenční ploše, která protíná všechny poledníky pod stále stejným úhlem - azimutem.

Azimut loxodromy:

$$\tan A = \frac{U_2 - U_1}{arctanh \sin V_2 - arctanh(\sin V_1)}$$

Délka loxodormy

$$s = R \frac{V_2 - V_1}{\cos A}$$