1. Lineární a vektorová algebra

1.1 n-rozměrné aritmetické vektory

Definice 1.1
Uspořádané n-tice reálných čísel (popř. komplexních) se nazývají n-rozměrné aritmetické vektory (vektory dimenze n).
Značíme je $\vec{\mathbf{a}}(\mathbf{a_1, a_2, \ldots\ a_n})$ nebo $\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{a_1, a_2, \ldots\ a_n})$
a čísla $\mathbf{a_1, a_2, \ldots\ a_n}$ se nazývají souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{a}}$.

Říkáme, že n-rozměrné vektory $\vec{\mathbf{a}}$ a $\vec{\mathbf{b}}$ jsou si rovny ($\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$),
právě tehdy když platí $\mathbf{a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots\ a_n = b_n}$.

Součtem n-rozměrných vektorů $\vec{\mathbf{a}}$ a $\vec{\mathbf{b}}$ nazýváme n-rozměrný vektor $\vec{\mathbf{c}}$
($\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$) právě tehdy když platí $\mathbf{c_1 = a_1 + b_1, c_2 = a_2 + b_2, \ldots\ c_n = a_n + b_n}$.

Vektorem $\mathbf{k}.\vec{\mathbf{a}}$, kde **k** je reálné (popř. komplexní) číslo (tzv. skalár)
a $\vec{\mathbf{a}}$ je n-rozměrný vektor, rozumíme n-rozměrný vektor $\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{d_1, d_2, \ldots\ d_n})$
se souřadnicemi $\mathbf{d_1 = k.a_1, d_2 = k.a_2, \ldots\ d_n = k.a_n}$.
Tuto operaci nazýváme násobení vektoru skalárem.

k = 0: $\mathbf{0}.\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{0, 0, \ldots 0}) = \vec{\mathbf{o}}$ nulový vektor
k = -1: $\mathbf{-1}.\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{-a_1, -a_2, \ldots\ -a_n}) = -\vec{\mathbf{a}}$ opačný vektor

Příklad 1
Rozhodněte, zda se jedná o vektory a určete jejich dimenzi.
$\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{1, 5, -10})$
$\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{-2, 5, 3})$
$\vec{\mathbf{c}} = (\mathbf{5{,}5,\ 6{,}85,\ 2,\ -4,\ 0})$
$\vec{\mathbf{d}}$ **= (A, B), A[1,-1], B[2,0] jsou body v rovině**

Příklad 2
Vypočítejte
$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$
$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{c}}$

Příklad 3
Vypočítejte
$\vec{\mathbf{u}} = 3\vec{\mathbf{a}}$
$\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{c}}$
$\vec{\mathbf{w}} = 2\vec{\mathbf{a}} - 4\vec{\mathbf{b}}$

Věta 1.1

Pro počítání s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ platí pravidla:

($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - n-rozměrné vektory, k, k_1, k_2 - reálná nebo komplexní čísla)

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	*komutativnost sčítání vektorů*
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	*asociativnost sčítání vektorů*
$\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$	
$k_1.(k_2.\vec{a}) = (k_1.k_2).\vec{a}$	*asociativnost násobení skalárem*
$k.(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$	*distributivnost násobení skalárem*
$(k_1 + k_2).\vec{a} = k_1.\vec{a} + k_1.\vec{a}$	

Definice 1.2

Množina všech n-rozměrných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem se nazývá **n-rozměrný vektorový prostor** (vektorový prostor dimenze n) a značí se V_n.

Definice 1.3

Říkáme, že vektor $\vec{b}$ je **lineární kombinací vektorů** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_p$,
je-li možno vyjádřit jej ve tvaru $\vec{b} = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_1 + \ldots\ldots + k_p\vec{a}_p$,
kde $k_1, k_2, \ldots\ldots k_p$, jsou **koeficienty lineární kombinace**.

Soustava vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_p \in V_n$ se nazývá **lineárně závislá**, je-li alespoň jeden z těchto vektorů možné vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů.

Není-li možné žádný z vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_p \in V_n$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních, pak říkáme, že tyto vektory jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 1.2

Je-li v soustavě vektorů jeden nulový vektor, pak tato soustava je lineárně závislá.

Věta 1.3

Soustava vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_p \in V_n$ je lineárně závislá, právě tehdy když platí: $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_1 + \ldots\ldots + k_p\vec{a}_p = \vec{o}$,
kde alespoň jeden z koeficientů $k_1, k_2, \ldots\ldots k_p$ je různý od nuly.

Soustava vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_p \in V_n$ je lineárně nezávislá, právě tehdy když platí: $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_1 + \ldots\ldots + k_p\vec{a}_p = \vec{o}$ pouze pro $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$.

Důsledek věty 1.3

Dva vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou lineárně závislé, jetliže jeden je nenulovým násobkem druhého, tj. $\vec{a} = k.\vec{b}$, $k \neq 0$.

Příklad 4

Rozhodněte, zda vekory jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

$\vec{a} = (2, 3, 6), \vec{b} = (1, 5, 2), \vec{c} = (1, 0, 3)$

$\vec{a} = (2, 3, 6), \vec{b} = (1, 5, 2), \vec{c} = (1, 0, 3), \vec{d} = (1, 1, 1)$

$\vec{a} = (2, 3, 6), \vec{b} = (1, 5, 2), \vec{c} = (5, 11, 14)$

$\vec{a} = (2, 3, 6), \vec{b} = (0, 0, 0), \vec{c} = (5, 11, 14)$

$\vec{a} = (2, -3, 6), \vec{b} = (-6, 9, -10)$

$\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (-6, 9)$

Definice 1.4

Každá soustava n lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_n \in \mathbf{V}_n$ se nazývá báze vektorovéhoprostoru $\mathbf{V}_n$ a značí se $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_n)$.
Vektorový prostor s bází $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_n)$ budeme značit $\mathbf{V}_n(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_n)$.

Věta 1.4

Každý vektorový prostor má alespoň jednu bázi.
Každý vektor $\vec{a} \in \mathbf{V}_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, přičemž koeficienty lineární kombinace jsou určeny jednoznačně.
Každá soustava n+1 vektorů v prostoru $\mathbf{V}_n$ je lineárně závislá.

Příklad 5

Ukažte, že soustava základních jednotkových vektorů tvoří bázi

$\mathbf{V}_2(\ (1, 0), (0, 1)\ )$

$\mathbf{V}_3(\ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\ )$

Příklad 6

Určete bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$.

Příklad 7

Určete, které soustavy vektorů z příkladu 4 jsou báze vektorového prostoru.

Příklad 8

Dokažte, že vektory $\vec{a}_1 = (1{,}5,\ 2)$ a $\vec{a}_2 = (2{,}5,\ 3)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}_2$.
Vyjádřete vektor $\vec{u} = (4, 1)$ pomocí této báze.

1.2 Vektory v geometrii

Orientovaná úsečka **AB**
= úsečka s počátečním bodem **A** a koncovým bodem **B**.

Definice 1.5
Geometrickým **vektorem** rozumíme množinu všech orientovaných úseček, které mají stejnou délku, jsou rovnoběžné a souhlasně orientované.
Umístění vektoru je každá jednotlivá orientovaná úsečka z této množiny.

Umístění vektoru $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ = rozdíl bodů **B - A**.

Příklad 9
Určete souřadnice vektoru $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, **A[-3, 0, 1], B[1, 2, -1]**.

Definice 1.6
Velikostí (délkou) vektoru a nazýváme délku jeho umístění.
$|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 + \dots + \mathbf{a}_n^2}$
Vektor, jehož velikost se rovná jedné, se nazývá **jednotkový vektor**.

Příklad 10
Určete velikost vektoru $\vec{\mathbf{u}}$ z příkladu 9.
Pokud vektor $\vec{\mathbf{u}}$ není jednotkový, proveďte jeho normování.

Definice 1.7
Dva nenulové vektory jsou **kolineární**, jestliže jejich umístění jsou rovnoběžná.

Definice 1.8
Tři (nebo více) nenulové vektory jsou **komplanární**, jestliže každý z nich je rovnoběžný s touž rovinou.

Věta 1.5
Dva nenulové vektory jsou lineárně závislé, právě tehdy když jsou kolineární.
Každé tři vektory v rovině jsou lineárně závislé.
Tři nenulové vektory v prostoru jsou lineárně závislé, právě tehdy když jsou komplanární.
Každé čtyři vektory v prostoru jsou lineárně závislé.

Definice 1.9

Souřadnicovou bází v rovině nazýváme každou uspořádanou dvojici $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ nekolineárních (tj. lineárně nezávislých) vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.
Souřadnicovou bází v prostoru nazýváme každou uspořádanou trojici $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ nekomplanárních (tj. lineárně nezávislých) vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.
Jestliže vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ jsou vzájemně kolmé, resp. každé dva z vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ jsou vzájemně kolmé, pak se tyto báze nazývají **ortogonální (pravoúhlá) báze**.
Jestliže vektory ortogonální báze jsou navíc jednotkové, pak se tato báze nazývá **ortonormální (kartézská) báze**.
Umístíme-li všechny vektory báze do bodu **O** (**počátek soustavy souřadnic**), pak mluvíme o **kartézské soustavě souřadnic** $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$, $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Věta 1.6

Každý vektor $\vec{a}$ lze jednoznačně rozložit do základních vektorů báze, tj, vždy existují taková čísla a_1, a_2, resp. a_1, a_2, a_3, že platí

$$\vec{a} = a_1.\vec{u}_1 + a_2.\vec{u}_2 \quad \text{resp.} \quad \vec{a} = a_1.\vec{u}_1 + a_2.\vec{u}_2 + a_3.\vec{u}_3 .$$

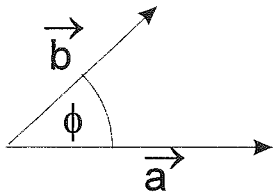
Čísla a_1, a_2, resp. a_1, a_2, a_3 se nazývají **souřadnice vektoru a** v bázi $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, resp. $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Obdobným způsobem zavedeme uvedené pojmy ve vícerozměrných prostorech.
Ortonormální báze se obvykle značí $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ nebo $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.3 Skalární součin

Definice 1.10

Úhlem (odchylkou) ϕ dvou nenulových nekolineárních vektorů $\vec{a} = \mathbf{OA}$, $\vec{b} = \mathbf{OB}$ nazýváme dutý úhel polopřímek **OA, OB**.
Jsou-li vektory $\vec{a}, \vec{b}$ souhlasně, resp. nesouhlasně kolineární, pak $\phi = \mathbf{0}$, resp. $\phi = \pi$.



Definice 1.11

Skalárním součinem $\vec{a}.\vec{b}$ dvou nenulových vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ rozumíme
$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\phi$,
kde $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ jsou velikosti vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ a ϕ je úhel těchto vektorů.
Jestliže je alespoň jeden z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ nulový, pak $\vec{a}.\vec{b} = \mathbf{0}$.

Věta 1.7

Skalární součin dvou nenulových vektorů se rovná nule, právě tehdy když tyto vektory jsou k sobě kolmé.

Věta 1.8

Výpočet skalárního součinu. Pro vektory $\vec{a}, \vec{b}$ dané souřadnicemi v ortonormální bázi $(\vec{i}, \vec{j})$, resp. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ platí
$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$, resp $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$.

Věta 1.9

Vlastnosti skalárního součinu.
$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$,
$(\vec{a} + \vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$,
$k.(\vec{a}.\vec{b}) = (k.\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k.\vec{b})$, $k \in \mathbf{R}$,
$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$.

Věta 1.10

Výpočet odchylky vektorů. Pro nenulové vektory $\vec{a}, \vec{b}$ dané souřadnicemi v ortonormální bázi platí

$$\cos\phi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Příklad 11

Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{a} = (1, -5, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$.
Vypočítejte odchylku vektorů $\vec{a} = (1, -5, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$.

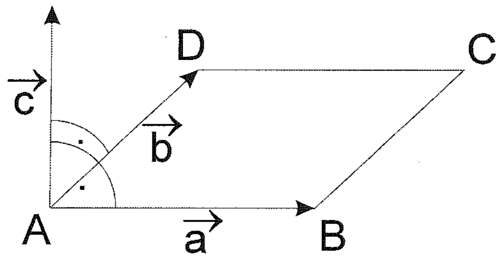
1.4 Vektorový součin

Definice 1.13

Vektorovým součinem $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ dvou nenulových nekolineárních vektorů $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ v kartézské soustavě souřadnic nazýváme vektor $\vec{\mathbf{c}}$, pro který platí:

1. Velikost vektoru $\vec{\mathbf{c}}$ se rovná obsah rovnoběžníka **ABCD**, který je určen vektory $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{AB}$, $\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{AD}$.
2. Vektor $\vec{\mathbf{c}}$ je kolmý k rovině rovnoběžníka **ABCD**.
3. Vektor $\vec{\mathbf{c}}$ je orientován tak, aby trojhran $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ měl kladnou orientaci, tj. aby determinant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0$

Jestliže vektory $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ jsou kolineární nebo alespoň jeden z nich je nulový, pak $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{o}}$.



Věta 1.12

Výpočet vektorového součinu. Pro vektorový součin $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ dvou vektorů $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ daných souřadnicemi v ortonormální bázi $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ platí

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Věta 1.13

Vlastnosti vektorového součinu.

$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}})$

$k.(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = (k.\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \times (k.\vec{\mathbf{b}})$

$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}})$

Příklad 12

Vypočtěte vektorový součin vektorů $\vec{\mathbf{a}} = (1, -5, 3)$, $\vec{\mathbf{b}} = (2, 1, 0)$.

Příklad 13

Určete obsah rovnoběžníka **ABCD: A[2, 4, 5], B[1, 0, 0], C[0, 2, 0]**.

Příklad 14

Napište obecnou rovnici roviny ρ **= ABC: A[1, 4, -2], B[0, 5, 1], C[2, -1, 0]**.

1.5 Smíšený součin

Definice 1.14

Smíšeným součinem $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ tří vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v tomto pořadí) nazýváme číslo $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c}$.

Věta 1.14

Výpočet smíšeného součinu. Pro smíšený součin tří vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (v tomto pořadí) daných souřadnicemi v ortonormální bázi $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ platí

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Věta 1.15

Jestliže vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou komplanární nebo alespoň jeden z nich je nulový, pak $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0$.

Věta 1.16

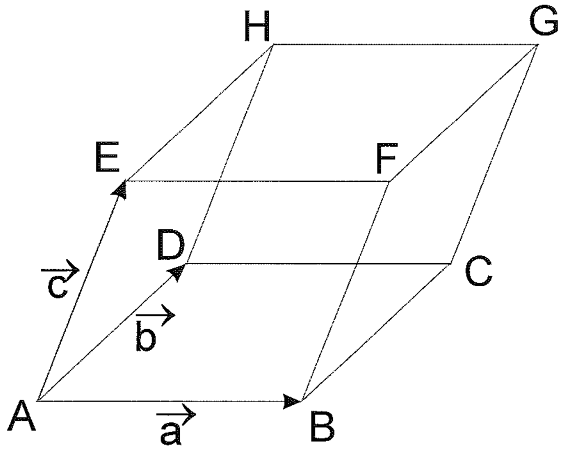
Vlastnosti smíšeného součinu.

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c} = \vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})$

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = - [\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}] = ...$

objem rovnoběžnostěnu ABCDEFGH

$V = |[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$.



Příklad 15

Vypočtěte smíšený součin vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = (1, -5, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$.

Příklad 16

Určete objem rovnoběžnostěnu **ABCDEFGH**:

A[2, 4, 5], B[1, 0, 0], C[0, 2, 0], D[0, 0, 3].