

2. Maticová algebra

2.1 Matice

Definice 2.1

Obdélníkové schéma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

které je vytvořeno z reálných (komplexních) čísel sestavených do m řádků a n sloupců nazýváme **maticí A typu (m, n)** .

Můžeme také říct, že maticí A typu (m, n) nazýváme m -tici n -rozměrných vektorů napsaných v řádcích pod sebou nebo n -tici m -rozměrných vektorů napsaných v sloupcích vedle sebe.

Čísla a_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) se nazývají **prvky matice**.

Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$ se nazývají **prvky hlavní diagonály matice A**.

Definice 2.2

Matici A (n, n)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazýváme **čtvercovou maticí n -tého řádu**.

Prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ (a_{ii}) se nazývají **prvky hlavní diagonály matice A**,

prvky $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ se nazývají **prvky vedlejší diagonály matice A**.

Definice 2.3

Nulová matice je matice O (m, n):

$a_{ij} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Jednotková matice n -tého řádu

je čtvercová matice I (n, n), někdy též E :

$a_{ij} = 1, \forall i = j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n.$

$a_{ij} = 0, \forall i \neq j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n.$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Definice 2.4

Transponovaná matice A^T k matici A vznikne z dané matice A vzájemnou výměnou řádků a sloupců.

Platí: $(A^T)^T = A$.

Příklad 2.1

Určete transponovanou matici A^T k matici

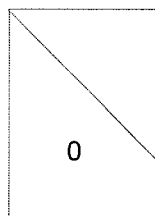
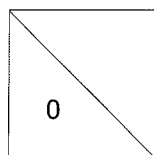
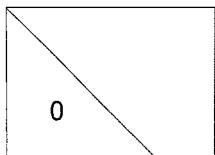
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -5 \\ -4 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Definice 2.5

Horní trojúhelníková matice je matice U (m, n), jejíž všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové,

tj. $u_{ij} = 0$, pro $i > j$.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{mn} \end{bmatrix}$$



Definice 2.6

Dolní trojúhelníková matice

je matice L (m, n), jejíž všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové, tj. $l_{ij} = 0$, pro $i < j$.

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & l_{mn} \end{bmatrix}$$

Definice 2.7

Diagonální matice je čtvercová matice D (n, n), jejíž všechny prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou nulové, tj. $u_{ij} = 0$, pro $i \neq j$.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Příklad 2.2

Uveďte příklad horní trojúhelníkové matice, dolní trojúhelníkové matice a diagonální matice.

2.2 Aritmetické operace s maticemi

Definice 2.8

Rovnost matic. Matice A, B se rovnají, jestliže jsou téhož typu (m, n) a stejnohlé prvky jsou si rovny,

tj. $A=B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$

Definice 2.9

Součet matic. Součtem dvou matic A, B téhož typu (m, n) je matice $C (m, n) = A + B$, pro jejíž prvky platí:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$

Příklad 2.3

Vypočítejte matici $C = A + B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Věta 2.1

Pravidla pro sčítání matic.

$$A + B = B + A$$

komutativní zákon

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

asociativní zákon

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$A + O = O + A = A$$

Příklad 2.4

Ověřte pravidla pro sčítání pro matice A, B z příkladu 2.1.

Definice 2.10

Násobení matice číslem (skalárem). Součinem matice $A (m, n)$ se skalárem $k \in \mathbb{R}$ je matice $B (m, n) = k \cdot A$, pro jejíž prvky platí:

$b_{ij} = k \cdot a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$

Příklad 2.5

Vypočítejte matici $C = 3A$.

Věta 2.2

Pravidla pro násobení matice číslem. ($k, l \in \mathbb{R}$)

$$k \cdot A + l \cdot A = (k + l) \cdot A$$

distributivní zákon

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$

distributivní zákon

$$k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$$

$$(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

Příklad 2.6

Řešte maticovou rovnici $2A + X = 3B$.

Definice 2.11

Součin matic. Součinem matice A (m, s) s maticí B (s, n) je matice C (m, n) $= A \cdot B$, pro jejíž prvky platí:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

tj. prvek c_{ij} je výsledkem skalárního součinu i -tého řádkového vektoru matice A a j -tého sloupcového vektoru matice B .

Příklad 2.7

Vypočítejte matici $C = A \cdot B$ a matici $D = B \cdot A$.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Věta 2.3

Pravidla pro násobení matic: ($k \in \mathbb{R}$)

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad \text{asociativní zákon}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \text{distributivní zákon}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

Příklad 2.8

Ověřte pravidla pro násobení matic pro matice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mocnina čtvercové matice A (n, n):

$$A^1 = A$$

$$A = A^{n-1} \cdot A \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Definujeme $A^0 = I$.

Příklad 2.9

Vypočítejte druhou mocninu A^2 matice A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.10

Vypočítejte třetí mocninu A^3 matice A.
(nilpotentní matice)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.11

Vypočítejte A^{127} .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pozor!

Součin matic **není obecně komutativní**, tj. $A \cdot B \neq B \cdot A$

Komutativnost součinu matic platí pouze v případech:

1. $A \cdot O = O \cdot A = O$

2. $A \cdot I = I \cdot A = A$

3. $A \cdot B = B \cdot A$, kde A, B jsou **diagonální** matice.

4. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, kde A^{-1} je matice **inverzní** k matici A.

Součin dvou nenulových matic může být matice nulová,

tj. $A \cdot B = O$, když $A \neq O$, $B \neq O$.

Příklad 2.12

Vypočítejte $C = A \cdot B$ a $D = B \cdot A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Může nastat rovnost $A \cdot B = A \cdot C$, když $B \neq C$.

Příklad 2.13

Vypočítejte $A \cdot B$ a $A \cdot C$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Hodnost matice

Definice 2.12

Hodnost h (A) matice A (m, n) je maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů (popřípadě sloupcových vektorů).

Věta 2.4

Hodnost h (A) matice A (m, n) je nejvýše rovna menšímu z čísel m, n .

Věta 2.5

Hodnost matice A se nezmění, jestliže:

1. Napíšeme její řádky v jiném pořadí.
 2. Vynásobíme libovolný řádek číslem $k \neq 0$.
 3. Přidáme k matici řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.
 4. Vynecháme řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.
 5. K libovolnému řádku přičteme lineární kombinací ostatních řádků.
- Úpravy 1.-5. z věty 2.5 nazýváme **elementární úpravy matice**.

Věta 2.6

Hodnost matice A se nezmění, jestliže provedeme elementární úpravy se sloupci matice.

Jestliže matice A a B mají stejnou hodnost a stejný počet sloupců, tj. matice B vznikla z matice A elementárními úpravami, pak říkáme, že **matice B je ekvivalentní s maticí A** a píšeme $A \sim B$.

Příklad 2.14

Určete hodnosti matic A, B, C, D, E .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 13 & 18 \\ 6 & -9 & 7 & 10 \\ 2 & -3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Výsledky:

Příklad 2.3

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.5

$$C = 3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.6

$$X = 3B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.7

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 11 & -13 & 15 & 20 \\ -3 & 9 & -15 & 0 \\ -4 & -1 & 6 & -13 \end{bmatrix}$$

$D = B \cdot A$ nelze násobit

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.9

$$A^2 = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.10

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & -18 & -9 \\ 6 & -18 & -9 \\ -8 & 24 & 12 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.11

$$A^{127} = \begin{bmatrix} 1 & 127 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = O$$

Příklad 2.12

$$C = A \cdot B = O$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} 26 & 52 \\ -13 & -26 \end{bmatrix}$$

$$C = A \cdot B = O$$

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.13

$$A \cdot B = A \cdot C = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.14

$$h(A) = 3, h(B) = 1, h(C) = 2, h(D) = 3, h(E) = 3$$

2.4 Inverzní matice

Definice 2.13

Čtvercová matice A je regulární, jestliže $\det A \neq 0$.

Čtvercová matice A je singulární, jestliže $\det A = 0$.

Věta 2.7

Ke každé regulární matici A existuje taková matice A^{-1} , pro kterou platí:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

kde E je jednotková matice stejného řádu.

Matici A^{-1} nazýváme inverzní matice k matici A .

Věta 2.8 (vlastnosti inverzní matice)

Ke každé regulární matici A existuje právě jedna inverzní matice A^{-1} , která má tyto vlastnosti:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Věta 2.9 (výpočet inverzní matice)

Nechť A je regulární matice řádu n . Pak inverzní matice A^{-1} se vypočítá:

$$1. \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

kde D_{ij} jsou doplňky prvků a_{ij} matice A .

2. (Gauss - Jordanova eliminace)

$$\left[\begin{array}{c|c} A & E \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \triangle & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} D & \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c|c} E & A^{-1} \end{array} \right]$$

matice A
jednotková matice E
horní trojúhelníková matice
diagonální matice
jednotková matice E
inverzní matice

Příklad 2.15

Určete matice inverzní k maticím A , B oběma způsoby uvedenými ve větě 2.9.

Proveďte zkoušku $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ -3/4 & -1/2 & 5/4 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.16

Určete inverzní matici A^{-1} k matici A .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.17

Určete inverzní matici A^{-1} k matici A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matice A je singulární.

Příklad 2.18

Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$\text{řešení: } [x, y, z]^T = [1, 2, -1]^T$$