3. Soustavy lineárních rovnic

3.1 Soustava lineárních rovnic

Definice 3.1

Soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých zapisujeme ve tvaru

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 \;\; a_{12}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 \;\; a_{22}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{2n}x_n = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 \;\; a_{m2}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Čísla $\mathbf{a_{ij}}$ jsou **koeficienty** soustavy.

Soustavu rovnic můžeme psát v maticovém tvaru **A.X = B**,označmíme-li

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}
$$

A- matice soustavy, B -vektor pravých stran, X - vektor neznámých.

Matice **A|B** je **rozšířená matice soustavy.**

$$
A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]
$$

Definice 3.2

Soustava, jejíž vektor pravých stran je nulový vektor, tj. **B = O**,
je **homogenní soustava.** Je-li **B ≠ O**, je soustava **nehomogenní.**

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 \;\; a_{12}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 \;\; a_{22}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{2n}x_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 \;\; a_{m2}x_2 \;\; \ldots\ldots \;\; a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}
$$

Definice 3.3

Řešení soustavy je každá n-tice čísel, která dané soustavě vyhovuje.

3.2 Řešení soustavy lineárních rovnic

Soustava má:
řešení (jedno nebo nekonečně mnoho) - řešitelná soustava,
právě jedno řešení - jednoznačně řešitelná soustava,
nemá řešení - neřešitelná soustava.

Řešit soustavu znamená najít všechna její řešení nebo zjistit, že je neřešitelná.

Metody řešení soustav:
1. **Přímé metody** - po konečném počtu přesně prováděných aritmetických operací dávají přesné řešení.
   (Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo)
2. **Numerické metody** - určují posloupnost přibližných hodnot řešení.

Podmínka řešitelnosti soustavy:

Věta 3.1 (Frobeniova věta)
Soustava ***m*** lineárních rovnic o ***n*** neznámých má **aspoň jedno řešení**, jestliže hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. **h(A) = h(A|B).**
(Jestliže **h(A)** < **h(A|B),** pak soustava je **neřešitelná**.)

Počet řešení určují věty:

Věta 3.2
Soustava ***m*** lineárních rovnic o ***n*** neznámých má **právě jedno řešení**, jestliže hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice se rovná počtu neznámých, tj. **h(A) = h(A|B) = n.**

Věta 3.3
Soustava ***m*** lineárních rovnic o ***n*** neznámých má **nekonečně mnoho řešení**, jestliže hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice je menší než počet neznámých, tj. **h(A) = h(A|B)** < **n.**
Potom **n-h** neznámých volíme libovolně (volíme n-h parametrů).

Věta 3.4
Homogenní soustava má vždy aspoň jedno řešení $\mathbf{x_1 = x_2 = ... = x_n = 0}$.

3.3 Gaussova eliminační metoda:

1.

Matici soustavy **A** a rozšířenou matici soustavy **A|B** upravíme pomocí elementárních úprav na horní trojúhelníkové matice, abychom zjistili jejich hodnosti **h(A), h(A|B)**.

2.

Podle věty 3.1 (Frobeniova věta) a vět 3.2, 3.3, ev. 3.4 určíme počet řešení.

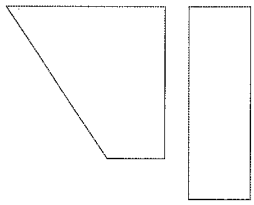
h(A), h(A|B)

h(A) = h(A|B)

aspoň jedno řešení

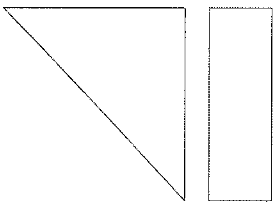
h(A) $<$ h(A|B)

nemá řešení



h(A) = h(A|B) = n.

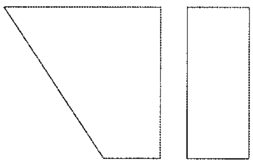
právě jedno řešení



h(A) = h(A|B) $<$ n.

nekonečně mnoho řešení

n - h parametrů



3.

Vypočítáme řešení.

3.4 Příklady

Gaussovou eliminací řešte soustavy lineárních rovnic:

1.

$$\begin{aligned} 5x - 9y + 5z &= 1 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

řešení:

právě jedno řešení

$[x, y, z]^T = [7, 1, -5]^T$

2.

$$\begin{aligned} x + 3y - 7z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ x + 3y - 7z &= 8 \end{aligned}$$

nemá řešení

3.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y - z &= 2 \end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení

$[x, y, z]^T = [-2t-1, 1+t, t]^T, t \in R$

4.

$$\begin{aligned} x + 2y - z + 3u &= 1 \\ -3x - 6y + 5z - 10u &= -1 \\ 2x + 4y + 5u &= 4 \end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení

$[x, y, z, u]^T = [7-5t_1-2t_2, t_2, t_1, 2t_1-2]^T$

$t_1, t_2 \in R$

5.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 3 \end{aligned}$$

nemá řešení

6.

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 0 \\ 3x + 4y - 2z &= 0 \\ 3x - 2y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

právě jedno řešení

$[x, y, z]^T = [0, 0, 0]^T$

7.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení

$[x, y, z, u]^T = [5t_1-3t_2, 2t_1-t_2, t_2, t_1]^T$

$t_1, t_2 \in R$

3.5 Soustavy s parametrem

Řešte soustavy lineárních rovnic s parametrem $\mathbf{a} \in R$:

1.

$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \\ 4x - 2y &= a \end{aligned}$$

řešení:

$a \neq -2$: právě jedno řešení

$$[x, y]^T = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(2 - a) \right]^T$$

$a = -2$: ∞ řešení

$[x, y]^T = [\, t, 1 + 2t \,]^T, t \in R$

2.

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

řešení:

$a \neq 1$, $a \neq -2$: právě jedno řešení

$$[x, y, z]^T = \left[-\frac{(1 + a)}{(2 + a)}, \frac{1}{(2 + a)}, \frac{(1 + a)^2}{(2 + a)} \right]^T$$

$a = 1$: ∞ řešení

$[x, y, z]^T = [1 - t - k, k, t\,]^T$, $t, k \in R$

$a = -2$: nemá řešení

3.

$$\begin{aligned} x + y + 2z + 2u &= 2 \\ x + 2y + 3z + u &= 3 \\ x + z + 3u &= a \end{aligned}$$

řešení:

$a = 1$: ∞ řešení

$[x, y, z, u]^T = [1 - k - 3t, 1 - k + t\, k, t\,]^T$

$t, k \in R$

$a \neq 1$: nemá řešení