

4. Determinanty

4.1 Determinant matice

Definice 4.1

Determinant n -tého řádu čtvercové matice A n -tého řádu je číslo $\det A = |A|$ definované takto:

1. $n = 1$: $\det A = |a_{11}| = a_{11}$

2. $n = 2$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3. $n > 2$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

kde $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$ jsou matice $(n-1)$ -ho řádu, které vznikly z matice A n -tého řádu vynecháním prvního řádku a příslušného (1., 2., n -tého) sloupce. (Takové vyjádření determinantu nazýváme rozvoj determinantu podle prvního řádku.)

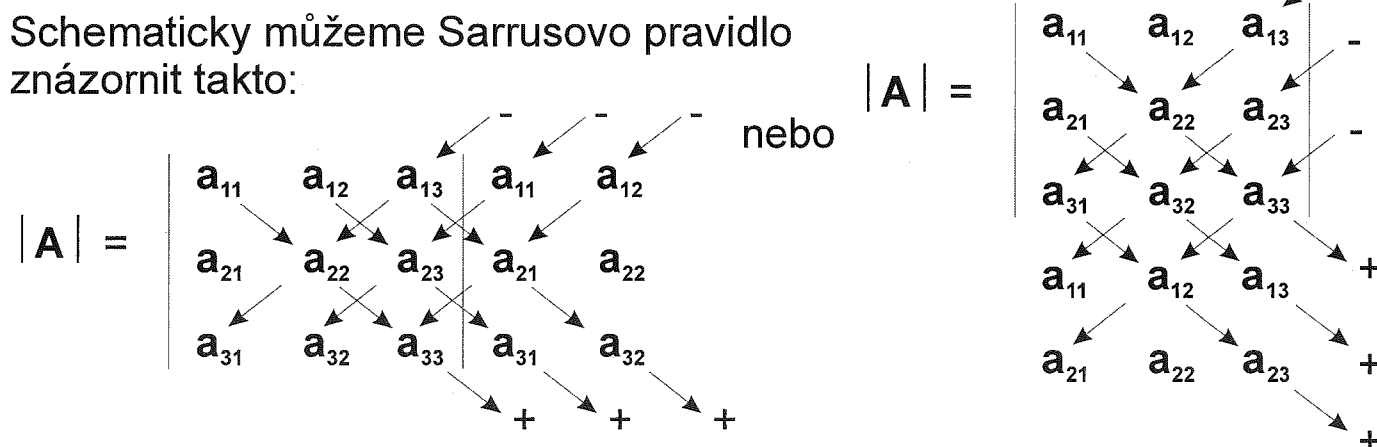
Věta 4.1 (Sarrusovo pravidlo)

A je čtvercová matice 3. řádu. Pak její determinant vypočítáme

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Schematicky můžeme Sarrusovo pravidlo znázornit takto:



Příklad 4.1

Vypočítejte determinanty matic **A**, **B**:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet determinantu matice řádu $n > 3$ použijeme rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce.

Věta 4.2

Nechť **A** je matice n -tého řádu.

Pak její determinant lze rozvinout podle prvků libovolného (i -tého) řádku

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in},$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

či (j -tého) sloupce

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj},$$

$$j = 1, 2, \dots, n,$$

kde A_{ij} jsou matice $(n-1)$ -ho řádu, které vznikly z matice **A** n -tého řádu vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Číslo $D_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ se nazývá (algebraický) doplněk prvku a_{ij} . Rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce pak můžeme vyjádřit

$$\det A = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\det A = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \dots + a_{nj} D_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Nejčastěji rozvíjíme determinant podle takového řádku či sloupce, ve kterém je nejvíc nulových prvků.

Příklad 4.2

Vypočítejte determinanty matic **A**, **B**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Důsledek věty 4.2

Determinant trojúhelníkové, resp. diagonální matice se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad 4.3

Vypočítejte determinanty matic **A**, **B**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

4.2 Vlastnosti determinantu matice

Věta 4.4

Pro libovolnou čtvercovou matici **A** platí $\det A = \det A^T$.

Důsledkem věty 4.3 je, že všechna tvrzení formulovaná pro řádky matice platí i pro její sloupce.

Věta 4.5 (pravidla pro počítání s determinanty)

1. Zaměníme-li v matici pořadí dvou řádků, změní se znaménko determinantu.
2. $\det A = 0$, jestliže - jeden řádek matice **A** je nulový,
- matice má dva řádky lineárně závislé,
- jeden řádek matice je lineární kombinací ostatních.
3. Jestliže vynásobíme prvky jednoho libovolného řádku determinantu číslem **k**, násobí se tímto číslem celý determinant.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \dots & k \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Determinant se nezmění, jestliže k libovolnému řádku přičtu lineární kombinaci ostatních řádků.
5. Pro dvě čtvercové matice **A**, **B** stejného řádu platí $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B = \det B \cdot A$

Příklad 4.4

Ověřte pravidla pro počítání s determinanty pro matice **A**, **B**, **C**:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Příklad 4.5

Vypočítejte příklad 4.2 úpravou matic **A**, **B** na horní trojúhelníkové matice.

4.3 Řešení soustav lineárních rovnic pomocí determinantů

Věta 4.6 (Cramerovo pravidlo)

Je-li determinant **D** matice soustavy různý od nuly $\det A = D \neq 0$, pak tato soustava má právě jedno řešení

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}, \quad \text{kde } D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Je-li $D = 0$, pak soustava buď nemá řešení nebo má nekonečně mnoho řešení.

Příklad 4.6

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7 \end{aligned}$$