

1 Parciální zlomky

Funkci tvaru $\frac{d(x)}{b(x)}$, kde $d(x)$, $b(x)$ jsou reálné polynomy, $b(x)$ nenulový, nazýváme funkcí **racionální**. Pokud $\text{st}(d) \geq \text{st}(b)$, lze polynomy $d(x)$, $b(x)$ dělit se zbytkem. Potom lze napsat $\frac{d(x)}{b(x)} = f(x) + \frac{a(x)}{b(x)}$, kde $a = 0$ nebo $\text{st}(a) < \text{st}(b)$. Funkci $\frac{a(x)}{b(x)}$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou reálné, nenulové polynomy a $\text{st}(a) < \text{st}(b)$, nazýváme funkcí **ryze racionální**.

Pokud polynom $b(x)$ ve jmenovateli ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ má u nejvyšší mocniny x nenulový koeficient $b_0 \neq 1$, potom lze čitatele i jmenovatele dělit číslem b_0 . Tím získáme ryze racionální funkci $\frac{a(x)}{b(x)}$, kde polynom $b(x)$ má u nejvyšší mocniny x koeficient 1, tedy má tvar $b(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$.

Mějme ryze racionální funkci $\frac{a(x)}{b(x)}$, kde $a(x)$, $b(x)$ jsou nenulové reálné polynomy, $\text{st}(a) < \text{st}(b)$, $b(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$. Použijeme reálný rozklad polynomu $b(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k)(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \dots (x^2 + p_lx + q_l)$. V reálném rozkladu se vyskytují pouze polynomy stupně 1 tvaru $(x - c)$, kde c je reálný kořen polynomu $b(x)$, či polynomy stupně 2 tvaru $(x^2 + px + q)$, které mají dvojici komplexně sdružených kořenů.

Pro lepší pochopení vysvětlíme rozklad na parciální zlomky v jednotlivých případech.

1. Reálný polynom $b(x)$ má jednoduché kořeny, tj. kořeny násobnosti 1.

Reálný rozklad polynomu

$$b(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k)(x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) \dots (x^2 + p_lx + q_l),$$

kde pro každé $i = 1, \dots, k$ je c_i reálný kořen polynomu $b(x)$ a $c_i \neq c_{i'}$ pro každé $i, i' = 1, \dots, k$, $i \neq i'$, a pro každé $j = 1, \dots, l$ je $x^2 + p_jx + q_j$ reálný polynom, který má za své kořeny dvojici komplexně sdružených čísel, pro každé $j, j' = 1, \dots, l$, $j \neq j'$ je $p_j \neq p_{j'}$ nebo $q_j \neq q_{j'}$. Potom $n = \text{st}(b) = k + 2l$.

V rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ odpovídá kořenovému

činiteli $(x - c)$ z reálného rozkladu polynomu $b(x)$ parciální zlomek $\frac{A}{x - c}$. Ve jmenovateli je kořenový činitel, tedy polynom stupně 1, v čitateli je obecný polynom stupně 0.

V rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ odpovídá kvadratickému trojčlenu s komplexními kořeny $(x^2 + px + q)$ z reálného rozkladu polynomu $b(x)$ parciální zlomek $\frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$. Ve jmenovateli je polynom stupně 2, v čitateli je obecný

polynom stupně 1.

Rozklad na parciální zlomky tedy předepíšeme ve tvaru:

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{A_k}{x - c_k} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + p_2x + q_2} + \cdots + \frac{B_lx + C_l}{x^2 + p_lx + q_l}$$

Nyní potřebujeme určit čísla $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_l, C_l$. Po vynásobení jmenovatelem získáme rovnost polynomů. Protože polynomy se rovnají, pokud jsou stejné koeficienty u příslušných mocnin x , budeme porovnávat koeficienty u mocnin x , získáme tak soustavu rovnic. Vyřešením soustavy rovnic dostaneme čísla $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, C_1, B_2, C_2, \dots, B_l, C_l$, tedy rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky.

Ukažme vše na příkladu.

Příklad 1.1 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{4x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 8x - 9}{x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má reálné kořeny $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = -1$ a dvojici komplexně sdružených kořenů $c_4 = i$, $c_5 = -i$, kterým v reálném rozkladu odpovídá kvadratický trojčlen $x^2 + 1$. Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{4x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 8x - 9}{x(x - 3)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$\begin{aligned} 4x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 8x - 9 &= \\ &= A(x - 3)(x + 1)(x^2 + 1) + Bx(x + 1)(x^2 + 1) + Cx(x - 3)(x^2 + 1) + (Dx + E)x(x - 3)(x + 1). \end{aligned}$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$\begin{aligned} 4x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 8x - 9 &= \\ &= (A + B + C + D)x^4 + (-2A + B - 3C - 2D + E)x^3 + (-2A + B + C - 3D - 2E)x^2 + \\ &\quad + (-2A + B - 3C - 3E)x - 3A. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých

$$\begin{aligned} x^4 : \quad 4 &= A + B + C + D \\ x^3 : \quad -16 &= -2A + B - 3C - 2D + E \\ x^2 : \quad -11 &= -2A + B + C - 3D - 2E \\ x^1 : \quad -8 &= -2A + B - 3C - 3E \\ x^0 : \quad -9 &= -3A, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 3$, $B = -2$, $C = 1$, $D = 2$, $E = -1$. Potom

$$\frac{4x^4 - 16x^3 - 11x^2 - 8x - 9}{x(x - 3)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x - 3} + \frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^2 + 1}.$$

□

Příklad 1.2 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{9x^6 + 19x^5 + 10x^4 + 37x^3 - 44x^2 + 21x - 36}{x(x-2)(x+3)(x^2+x+1)(x^2+3)}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má reálné kořeny $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = -3$, kvadratické trojčleny (x^2+x+1) , (x^2+3) mají pouze komplexní kořeny. Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{9x^6 + 19x^5 + 10x^4 + 37x^3 - 44x^2 + 21x - 36}{x(x-2)(x+3)(x^2+x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{x^2+3}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$\begin{aligned} 9x^6 + 19x^5 + 10x^4 + 37x^3 - 44x^2 + 21x - 36 &= \\ &= A(x-2)(x+3)(x^2+x+1)(x^2+3) + Bx(x+3)(x^2+x+1)(x^2+3) + \\ &+ Cx(x-2)(x^2+x+1)(x^2+3) + (Dx+E)x(x-2)(x+3)(x^2+3) + \\ &+ (Fx+G)x(x-2)(x+3)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$\begin{aligned} 9x^6 + 19x^5 + 10x^4 + 37x^3 - 44x^2 + 21x - 36 &= \\ &= (A+B+C+D+F)x^6 + (2A+4B-C+D+E+2F+G)x^5 + \\ &+ (-A+7B+2C-3D+E-4F+2G)x^4 + (A+15B-5C+3D-3E-5F-4G)x^3 + \\ &+ (-18A+12B-3C-18D+3E-6F-5G)x^2 + (-15A+9B-6C-18E-6G)x - 18A. \end{aligned}$$

Nyní porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 7 rovnic pro 7 neznámých

$$\begin{aligned} x^6: \quad 9 &= A+B+C+D+F \\ x^5: \quad 19 &= 2A+4B-C+D+E+2F+G \\ x^4: \quad 10 &= -A+7B+2C-3D+E-4F+2G \\ x^3: \quad 37 &= A+15B-5C+3D-3E-5F-4G \\ x^2: \quad -44 &= -18A+12B-3C-18D+3E-6F-5G \\ x^1: \quad 21 &= -15A+9B-6C-18E-6G \\ x^0: \quad -36 &= -18A, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$, $D = 1$, $E = -2$, $F = 2$, $G = 1$. Potom

$$\frac{9x^6 + 19x^5 + 10x^4 + 37x^3 - 44x^2 + 21x - 36}{x(x-2)(x+3)(x^2+x+1)(x^2+3)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{x-2}{x^2+x+1} + \frac{2x+1}{x^2+3}.$$

□

2. Reálný polynom $b(x)$ má vícenásobné reálné kořeny.

Mějme reálný rozklad polynomu $b(x)$ ve tvaru

$$b(x) = (x-c_1)^{h_1}(x-c_2)^{h_2} \cdots (x-c_k)^{h_k},$$

kde pro každé $i = 1, \dots, k$ je kořen c_i reálný a h_i -násobný, $c_i \neq c_{i'}$ pro každé $i \neq i'$, $i, i' = 1, \dots, k$. Potom $n = \text{st}(b) = h_1 + h_2 + \dots + h_k$.

V rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ bude odpovídat pro každé $i = 1, \dots, k$ kořenovému činiteli $(x - c_i)$ s násobností h_i reálného rozkladu polynomu $b(x)$ součet h_i parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_{i1}}{x - c_i} + \frac{A_{i2}}{(x - c_i)^2} + \dots + \frac{A_{ih_i}}{(x - c_i)^{h_i}}.$$

Tedy rozklad na parciální zlomky bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{a(x)}{b(x)} &= \frac{A_{11}}{x - c_1} + \frac{A_{12}}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{A_{1h_1}}{(x - c_1)^{h_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{x - c_2} + \frac{A_{22}}{(x - c_2)^2} + \dots + \frac{A_{2h_2}}{(x - c_2)^{h_2}} + \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{A_{k1}}{x - c_k} + \frac{A_{k2}}{(x - c_k)^2} + \dots + \frac{A_{kh_k}}{(x - c_k)^{h_k}}. \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme určit čísla $A_{11}, \dots, A_{1h_1}, A_{21}, \dots, A_{2h_2}, \dots, A_{k1}, \dots, A_{kh_k}$.

Rovnost pro parciální zlomky vynásobíme jmenovatelem a získáme tak rovnost polynomů. Porovnáním koeficientů u mocnin x získáme soustavu rovnic, jejím řešením dostaneme požadovaná čísla, tedy rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky.

Opět ukážeme na příkladu.

Příklad 1.3 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x}{x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má reálné kořeny $c_{1,2,3} = 2$, $c_{4,5} = -1$, proto $b(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$.

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x}{(x - 2)^3(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{(x - 2)^3} + \frac{D}{x + 1} + \frac{E}{(x + 1)^2}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x = A(x - 2)^2(x + 1)^2 + B(x - 2)(x + 1)^2 + C(x + 1)^2 + D(x - 2)^3(x + 1) + E(x - 2)^3.$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x = (A + D)x^4 + (-2A + B - 5D + E)x^3 + (-3A + C + 6D - 6E)x^2 + (4A - 3B + 2C + 4D + 12E)x + (4A - 2B + C - 8D - 8E).$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých

$$\begin{aligned}
x^4 : \quad 7 &= A + D \\
x^3 : \quad -28 &= -2A + B - 5D + E \\
x^2 : \quad 31 &= -3A + C + 6D - 6E \\
x^1 : \quad -15 &= 4A - 3B + 2C + 4D + 12E \\
x^0 : \quad 0 &= 4A - 2B + C - 8D - 8E,
\end{aligned}$$

která má řešení $A = 3, B = 1, C = -2, D = 4, E = -3$. Potom

$$\begin{aligned}
&\frac{7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x}{x^5 - 4x^4 + x^3 + 10x^2 - 4x - 8} = \frac{7x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 15x}{(x-2)^3(x+1)^2} = \\
&\frac{3}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^3} + \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

□

3. Reálný polynom $b(x)$ má vícenásobné komplexní kořeny.

Mějme reálný rozklad polynomu $b(x)$ ve tvaru

$$b(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{t_2} \cdots (x^2 + p_lx + q_l)^{t_l},$$

kde pro každé $j = 1, \dots, l$ reálný kvadratický trojčlen $x^2 + p_jx + q_j$, který má za své kořeny dvojici komplexně sdružených čísel, se v rozkladu vyskytuje t_j -krát, pro každé $j, j' = 1, \dots, l, j \neq j'$ je $p_j \neq p_{j'}$ nebo $q_j \neq q_{j'}$. Potom $n = \text{st}(b) = 2t_1 + 2t_2 + \cdots + 2t_l$.

V rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ bude odpovídat pro každé $j = 1, \dots, l$ kvadratickému trojčlenu $(x^2 + p_jx + q_j)$ s násobností t_j reálného rozkladu polynomu $b(x)$ součet t_j parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \cdots + \frac{B_{jt_j}x + C_{jt_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{t_j}}.$$

Tedy rozklad na parciální zlomky bude ve tvaru:

$$\begin{aligned}
\frac{a(x)}{b(x)} = &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1t_1}x + C_{1t_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}} + \\
&+ \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \cdots + \frac{B_{2t_2}x + C_{2t_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{t_2}} + \\
&+ \cdots + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \cdots + \frac{B_{lt_l}x + C_{lt_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{t_l}}.
\end{aligned}$$

Nyní potřebujeme určit čísla

$$B_{11}, C_{11}, \dots, B_{1t_1}, C_{1t_1}, B_{21}, C_{21}, \dots, B_{2t_2}, C_{2t_2}, \dots, B_{l1}, C_{l1}, \dots, B_{lt_l}, C_{lt_l}.$$

Rovnost pro parciální zlomky vynásobíme jmenovatelem a získáme tak rovnost polynomů. Porovnáním koeficientů u mocnin x získáme soustavu rovnic, jejím řešením dostaneme požadovaná čísla, tedy rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky.

Ukážeme na příkladu.

Příklad 1.4 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^3$. Nyní můžeme předeepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^3}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x = (Ax + B)(x^2 + 1)^2 + (Cx + D)(x^2 + 1) + (Ex + F).$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x = Ax^5 + Bx^4 + (2A + C)x^3 + (2B + D)x^2 + (A + C + E)x + (B + D + F).$$

Porovnáme koeficienty u mocnin x . Tím získáme soustavu 6 rovnic pro 6 neznámých

$$\begin{aligned} x^5 : 1 &= A \\ x^4 : 2 &= B \\ x^3 : 4 &= 2A + C \\ x^2 : 1 &= 2B + D \\ x^1 : 2 &= A + C + E \\ x^0 : 0 &= B + D + F, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 1, B = 2, C = 2, D = -3, E = -1, F = 1$. Potom

$$\frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} = \frac{x + 2}{x^2 + 1} + \frac{2x - 3}{(x^2 + 1)^2} + \frac{-x + 1}{(x^2 + 1)^3}.$$

□

4. Reálný polynom $b(x)$ - libovolný. Mějme reálný rozklad polynomu $b(x)$ ve tvaru

$$b(x) = (x - c_1)^{h_1} (x - c_2)^{h_2} \cdots (x - c_k)^{h_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{t_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{t_2} \cdots (x^2 + p_lx + q_l)^{t_l},$$

kde pro každé $i = 1, \dots, k$ je kořen c_i reálný a h_i -násobný, pro každé $i, i' = 1, \dots, k$, $i \neq i'$ je $c_i \neq c_{i'}$ a pro každé $j = 1, \dots, l$ reálný kvadratický trojčlen $x^2 + p_jx + q_j$, který má za své kořeny dvojici komplexně sdružených čísel, se v rozkladu vyskytuje t_j -krát, pro každé $j, j' = 1, \dots, l$, $j \neq j'$ je $p_j \neq p_{j'}$ nebo $q_j \neq q_{j'}$.

Potom $n = \text{st}(b) = h_1 + h_2 + \cdots + h_k + 2t_1 + 2t_2 + \cdots + 2t_l$.

Podle předchozích případů již umíme předeepsat parciální zlomky.

Pro každé $i = 1, \dots, k$ bude v rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ odpovídat kořenovému činiteli $(x - c_i)$ s násobností h_i reálného rozkladu polynomu $b(x)$ součet h_i parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_{i1}}{x - c_i} + \frac{A_{i2}}{(x - c_i)^2} + \dots + \frac{A_{ih_i}}{(x - c_i)^{h_i}}.$$

Pro každé $j = 1, \dots, l$ bude v rozkladu na parciální zlomky ryze racionální funkce $\frac{a(x)}{b(x)}$ odpovídat kvadratickému trojčlenu s komplexními kořeny násobností t_j reálného rozkladu polynomu $b(x)$ součet t_j parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jt_j}x + C_{jt_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{t_j}}.$$

Tedy rozklad na parciální zlomky bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{a(x)}{b(x)} = & \frac{A_{11}}{x - c_1} + \frac{A_{12}}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{A_{1h_1}}{(x - c_1)^{h_1}} + \\ & + \frac{A_{21}}{x - c_2} + \frac{A_{22}}{(x - c_2)^2} + \dots + \frac{A_{2h_2}}{(x - c_2)^{h_2}} + \\ & + \dots + \frac{A_{k1}}{x - c_k} + \frac{A_{k2}}{(x - c_k)^2} + \dots + \frac{A_{kh_k}}{(x - c_k)^{h_k}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1t_1}x + C_{1t_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}} + \\ & + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2 + p_2x + q_2} + \frac{B_{22}x + C_{22}}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{2t_2}x + C_{2t_2}}{(x^2 + p_2x + q_2)^{t_2}} + \\ & + \dots + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{B_{lt_l}x + C_{lt_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{t_l}}. \end{aligned}$$

Nyní potřebujeme určit čísla $A_{11}, \dots, A_{1h_1}, A_{21}, \dots, A_{2h_2}, \dots, A_{k1}, \dots, A_{kh_k}, B_{11}, C_{11}, \dots, B_{1t_1}, C_{1t_1}, B_{21}, C_{21}, \dots, B_{2t_2}, C_{2t_2}, \dots, B_{l1}, C_{l1}, \dots, B_{lt_l}, C_{lt_l}$.

Rovnost pro parciální zlomky vynásobíme jmenovatelem a získáme tak rovnost polynomů. Porovnáním koeficientů u mocnin x získáme soustavu rovnic, jejím řešením dostaneme požadovaná čísla, tedy rozklad ryze racionální funkce na parciální zlomky.

Obecný tvar polynomu $b(x)$ též ukážeme na příkladech.

Příklad 1.5 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{x^6 + 7x^5 + 29x^4 + 98x^3 + 232x^2 + 248x + 172}{x^7 + 12x^6 + 52x^5 + 112x^4 + 197x^3 + 304x^2 + 192x + 256}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^7 + 12x^6 + 52x^5 + 112x^4 + 197x^3 + 304x^2 + 192x + 256 =$

$$(x+4)^3(x^4+4x^2+4) = (x+4)^3(x^2+2)^2.$$

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{x^6 + 7x^5 + 29x^4 + 98x^3 + 232x^2 + 248x + 172}{(x+4)^3(x^2+2)^2} &= \\ &= \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{C}{(x+4)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+2} + \frac{Fx+G}{(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$x^6 + 7x^5 + 29x^4 + 98x^3 + 232x^2 + 248x + 172 = A(x+4)^2(x^2+2)^2 + B(x+4)(x^2+2)^2 + C(x^2+2)^2 + (Dx+E)(x+4)^3(x^2+2) + (Fx+G)(x+4)^3.$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$\begin{aligned} x^6 + 7x^5 + 29x^4 + 98x^3 + 232x^2 + 248x + 172 &= (A+D)x^6 + (8A+B+12D+E)x^5 + \\ &+ (20A+4B+C+50D+12E+F)x^4 + (32A+4B+88D+50E+12F+G)x^3 + \\ &+ (68A+16B+4C+96D+88E+48F+12G)x^2 + (32A+4B+128D+96E+64F+48G)x + \\ &+ (64A+16B+4C+128E+64G). \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 7 rovnic pro 7 neznámých

$$\begin{aligned} x^6 : \quad 1 &= A + D \\ x^5 : \quad 7 &= 8A + B + 12D + E \\ x^4 : \quad 29 &= 20A + 4B + C + 50D + 12E + F \\ x^3 : \quad 98 &= 32A + 4B + 88D + 50E + 12F + G \\ x^2 : \quad 232 &= 68A + 16B + 4C + 96D + 88E + 48F + 12G \\ x^1 : \quad 248 &= 32A + 4B + 128D + 96E + 64F + 48G \\ x^0 : \quad 172 &= 64A + 16B + 4C + 128E + 64G, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 1, B = -2, C = 3, D = 0, E = 1, F = 2, G = 0$. Potom

$$\begin{aligned} \frac{x^6 + 7x^5 + 29x^4 + 98x^3 + 232x^2 + 248x + 172}{x^7 + 12x^6 + 52x^5 + 112x^4 + 197x^3 + 304x^2 + 192x + 256} &= \\ &= \frac{1}{x+4} - \frac{2}{(x+4)^2} + \frac{3}{(x+4)^3} + \frac{1}{x^2+2} + \frac{2x}{(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

□

Příklad 1.6 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{-x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 20x - 6}{x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 36x^2 + 9x - 54}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 36x^2 + 9x - 54 = (x-6)(x^2+3)^2$.

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{-x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 20x - 6}{(x-6)(x^2+3)^2} = \frac{A}{x-6} + \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+3)^2}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$-x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 20x - 6 = A(x^2 + 3)^2 + (Bx + C)(x - 6)(x^2 + 3) + (Dx + E)(x - 6).$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$-x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 20x - 6 = (A + B)x^4 + (-6B + C)x^3 + (6A + 3B - 6C + D)x^2 + (-18B + 3C + E - 6D)x + (9A - 18B - 6E).$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých

$$\begin{aligned} x^4 : \quad -1 &= A + B \\ x^3 : \quad -7 &= -6B + C \\ x^2 : \quad -3 &= 6A + 3B - 6C + D \\ x^1 : \quad -20 &= -18B + 3C - 6D + E \\ x^0 : \quad -6 &= 9A - 18C - 6E, \end{aligned}$$

která má řešení $A = -2$, $B = 1$, $C = -1$, $D = 0$, $E = 1$. Potom

$$\frac{-x^4 - 7x^3 - 3x^2 - 20x - 6}{x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 36x^2 + 9x - 54} = -\frac{2}{x - 6} + \frac{x - 1}{x^2 + 3} + \frac{1}{(x^2 + 3)^2}.$$

□

Příklad 1.7 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{6x^7 - 27x^6 + 57x^5 - 103x^4 + 131x^3 - 99x^2 + 91x - 20}{x^8 - 7x^7 + 15x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 48x^3 + 44x^2 - 20x}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^8 - 7x^7 + 15x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 48x^3 + 44x^2 - 20x = x(x - 5)(x - 1)^2(x^4 + 4x^2 + 4) = x(x - 5)(x - 1)^2(x^2 + 2)^2$.

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{6x^7 - 27x^6 + 57x^5 - 103x^4 + 131x^3 - 99x^2 + 91x - 20}{x(x - 5)(x - 1)^2(x^2 + 2)^2} &= \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 5} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + 2} + \frac{Gx + H}{(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$\begin{aligned} 6x^7 - 27x^6 + 57x^5 - 103x^4 + 131x^3 - 99x^2 + 91x - 20 &= A(x - 5)(x - 1)^2(x^2 + 2)^2 + \\ &+ Bx(x - 1)^2(x^2 + 2)^2 + Cx(x - 5)(x - 1)(x^2 + 2)^2 + Dx(x - 5)(x^2 + 2)^2 + \\ &+ (Ex + F)x(x - 5)(x - 1)^2(x^2 + 2) + (Gx + H)x(x - 5)(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme a porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 8 rovnic pro 8 neznámých

$$\begin{aligned}
x^7: \quad 6 &= A + B + C + E \\
x^6: \quad -27 &= -7A - 2B - 6C + D - 7E + F \\
x^5: \quad 57 &= 15A + 5B + 9C - 5D + 13E - 7F + G \\
x^4: \quad -103 &= -33A - 8B - 24C + 4D - 19E + 13F - 7G + H \\
x^3: \quad 131 &= 48A + 8B + 24C - 20D + 22E - 19F + 11G - 7H \\
x^2: \quad -99 &= -48A - 8B - 24C + 4D - 10E + 22F - 5G + 11H \\
x^1: \quad 91 &= 44A + 4B + 20C - 20D - 10F - 5H \\
x^0: \quad -20 &= -20A,
\end{aligned}$$

která má řešení $A = 1, B = 3, C = 1, D = -1, E = 1, F = 0, G = 0, H = 1$.
Potom

$$\begin{aligned}
\frac{6x^7 - 27x^6 + 57x^5 - 103x^4 + 131x^3 - 99x^2 + 91x - 20}{x^8 - 7x^7 + 15x^6 - 33x^5 + 48x^4 - 48x^3 + 44x^2 - 20x} &= \\
&= \frac{1}{x} + \frac{3}{x-5} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{(x^2+2)^2}.
\end{aligned}$$

□

Příklad 1.8 Rozložte na parciální zlomky následující racionální funkci

$$\frac{d(x)}{b(x)} = \frac{9x^6 + 21x^5 + 12x^4 - 45x^3 - 69x^2 + 15x + 12}{3x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 6x + 12}.$$

Řešení

Čitatele i jmenovatele lze zkrátit číslem 3, proto

$$\frac{9x^6 + 21x^5 + 12x^4 - 45x^3 - 69x^2 + 15x + 12}{3x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 6x + 12} = \frac{3x^6 + 7x^5 + 4x^4 - 15x^3 - 23x^2 + 5x + 4}{x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 4}.$$

Protože $\text{st}(d) \geq \text{st}(b)$, lze polynomy $d(x)$, $b(x)$ dělit se zbytkem. Potom

$$\frac{d(x)}{b(x)} = 3x + 1 + \frac{5x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 5x}{x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 4}, \text{ kde } \text{st}(a) < \text{st}(b).$$

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2(x+2)(x^2+2x+2)$.

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{5x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 5x}{(x-1)^2(x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{Dx+E}{x^2+2x+2}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$5x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 5x = A(x-1)(x+2)(x^2+2x+2) + B(x+2)(x^2+2x+2) + C(x-1)^2(x^2+2x+2) + (Dx+E)(x-1)^2(x+2).$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$5x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 5x = (A+C+D)x^4 + (3A+B+E)x^3 + (2A+4B-C-3D)x^2 + (-2A+6B-2C+2D-3E)x + (-4A+4B+2C+2E).$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 5 rovnic pro 5 neznámých

$$\begin{aligned}
x^4 : \quad 5 &= A + C + D \\
x^3 : \quad -2 &= 3A + B + E \\
x^2 : \quad -13 &= 2A + 4B - C - 3D \\
x^1 : \quad -5 &= -2A + 6B - 2C + 2D - 3E \\
x^0 : \quad 0 &= -4A + 4B + 2C + 2E,
\end{aligned}$$

která má řešení $A = 0$, $B = -1$, $C = 3$, $D = 2$, $E = -1$. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{9x^6 + 21x^5 + 12x^4 - 45x^3 - 69x^2 + 15x + 12}{3x^5 + 6x^4 - 3x^3 - 12x^2 - 6x + 12} &= 3x + 1 + \frac{5x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 5x}{x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 4} = \\
3x + 1 - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} + \frac{2x-1}{x^2+2x+2}.
\end{aligned}$$

□

Příklad 1.9 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má pouze komplexní kořeny, proto jej musíme rozložit na součin dvou reálných kvadratických trojčlenů. Můžeme postupovat tak, že najdeme všechny komplexní kořeny polynomu použitím Moivreovy věty a pak vynásobíme kořenové činitele odpovídající komplexně sdruženým kořenům. Daleko rychlejší je využít následující úpravy

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$x^4 + 1 = (Ax + B)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (Cx + D)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$x^4 + 1 = (A + C)x^3 + (\sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D)x^2 + (A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D)x + (B + D).$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 4 rovnic pro 4 neznámé

$$\begin{aligned}
x^3 : \quad 0 &= A + C \\
x^2 : \quad 0 &= \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}C + D \\
x^1 : \quad 0 &= A + \sqrt{2}B + C - \sqrt{2}D \\
x^0 : \quad 1 &= B + D,
\end{aligned}$$

která má řešení $A = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $D = \frac{1}{2}$. Potom

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

□

Poznámka Podobným způsobem lze jednoduše s využitím základních vzorců napsat reálný rozklad polynomu $x^6 + 1$. Podle vzorce $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ píšeme, $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$. Nyní stejně jako v příkladu ?? upravujeme $x^4 - x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2 = (x^2 + 1)^2 - 3x^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3}x)(x^2 + 1 + \sqrt{3}x)$, poslední rovnost byla s využitím vzorce $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Nyní již máme reálný rozklad ve tvaru $x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$, každý ze tří kvadratických trojčlenů má za kořeny dvojici komplexně sdružených čísel.

Příklad 1.10 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{x^7 + (4 + \sqrt{3})x^6 - 4x^5 + (\sqrt{3} - 1)x^4 - 5x^3 + x^2 + 3}{x^8 + x^2}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x^2(x^6 + 1) = x^2(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$ s využitím poznámky. Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{x^7 + (4 + \sqrt{3})x^6 - 4x^5 + (\sqrt{3} - 1)x^4 - 5x^3 + x^2 + 3}{x^8 + x^2} &= \\ &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{x^2 - \sqrt{3}x + 1} + \frac{Gx + H}{x^2 + \sqrt{3}x + 1}. \end{aligned}$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$\begin{aligned} x^8 + x^2 &= \\ Ax(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) &+ B(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) + \\ (Cx + D)x^2(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) &+ (Ex + F)x^2(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1) + \\ (Gx + H)x^2(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1). \end{aligned}$$

Polynom na pravé straně rovnosti roznásobíme.

$$\begin{aligned} x^8 + x^2 &= \\ (A + C + E + G)x^7 + (B + D + \sqrt{3}E + F - \sqrt{3}G + H)x^6 &+ (-C + 2E + \sqrt{3}F + 2G - \sqrt{3}H)x^5 + \\ (-D + 2F + \sqrt{3}E + 2H - \sqrt{3}G)x^4 + (C + E + \sqrt{3}F + G - \sqrt{3}H)x^3 &+ (D + F + H)x^2 + Ax + B. \end{aligned}$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin x . Tím získáme soustavu 8 rovnic pro 8 neznámých

$$\begin{aligned} x^7 : \quad 1 &= A + C + E + G \\ x^6 : \quad 4 + \sqrt{3} &= B + D + \sqrt{3}E + F - \sqrt{3}G + H \\ x^5 : \quad -4 &= -C + 2E + \sqrt{3}F + 2G - \sqrt{3}H \\ x^4 : \quad \sqrt{3} - 1 &= -D + 2F + \sqrt{3}E + 2H - \sqrt{3}G \\ x^3 : \quad -5 &= C + E + \sqrt{3}F + G - \sqrt{3}H \\ x^2 : \quad 1 &= D + F + H \\ x^1 : \quad 0 &= A \\ x^0 : \quad 3 &= B, \end{aligned}$$

která má řešení $A = 0$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$, $E = 1$, $F = -\sqrt{3}$, $G = 0$, $H = \sqrt{3}$.

Potom

$$\frac{x^7 + (4 + \sqrt{3})x^6 - 4x^5 + (\sqrt{3} - 1)x^4 - 5x^3 + x^2 + 3}{x^8 + x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{0x+1}{x^2+1} + \frac{1x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{0x+\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1} = \\
&= \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{x-\sqrt{3}}{x^2-\sqrt{3}x+1} + \frac{\sqrt{3}}{x^2+\sqrt{3}x+1}.
\end{aligned}$$

□

Poznámka V případě, že polynom ve jmenovateli má pouze jednoduché reálné kořeny, tedy má tvar $b(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$, $\text{st}(b) = n$, pak předepisujeme parciální zlomky ve tvaru $\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - c_n}$. Po vynásobení jmenovatelem získáme rovnost tvaru

$$\begin{aligned}
a(x) = A_1(x - c_2)(x - c_3) \cdots (x - c_n) + A_2(x - c_1)(x - c_3) \cdots (x - c_n) + \cdots \\
+ A_n(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{n-1}).
\end{aligned}$$

Nyní můžeme postupovat jako dříve, tedy polynomu na pravé straně roznásobit a porovnat koeficienty u mocnin x . V případě různých reálných kořenů, však lze postupovat i jiným způsobem. Stačí si uvědomit, že polynomy na levé a pravé straně rovnosti se rovnají pro každé x , tedy i pro zcela konkrétně zvolená x . V tomto případě je vhodné za kontrétní hodnoty x volit kořeny $c_1, c_2, \dots, c_n$. Získáme:

$$\begin{aligned}
\text{pro } x = c_1 : \quad a(c_1) &= A_1(c_1 - c_2)(c_1 - c_3) \cdots (c_1 - c_n) \\
\text{pro } x = c_2 : \quad a(c_2) &= A_2(c_2 - c_1)(c_2 - c_3) \cdots (c_2 - c_n) \\
&\dots\dots\dots \\
\text{pro } x = c_n : \quad a(c_n) &= A_n(c_n - c_1)(c_n - c_2) \cdots (c_n - c_{n-1}).
\end{aligned}$$

Řešení koeficientů $A_1, A_2, \dots, A_n$ je nyní velmi jednoduché. Uvědomme si však, že takto jednoduché to je jen v případě, že polynom ve jmenovateli má **pouze jednonásobné reálné kořeny**.

Příklad 1.11 Rozložte na parciální zlomky následující ryze racionální funkci

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{9x^4 + 15x^3 - 78x^2 - 78x + 240}{x^5 + 2x^4 - 21x^3 - 22x^2 + 40x}.$$

Řešení

Polynom $b(x)$ má tvar $b(x) = x(x - 1)(x - 4)(x + 2)(x + 5)$.

Nyní můžeme předepsat parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{9x^4 + 15x^3 - 78x^2 - 78x + 240}{x(x - 1)(x - 4)(x + 2)(x + 5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 4} + \frac{D}{x + 2} + \frac{E}{x + 5}.$$

Vynásobením této rovnosti jmenovatelem získáme rovnost

$$\begin{aligned}
9x^4 + 15x^3 - 78x^2 - 78x + 240 &= A(x - 1)(x - 4)(x + 2)(x + 5) + Bx(x - 4)(x + 2) \\
&+ Cx(x - 1)(x + 2)(x + 5) + Dx(x - 1)(x - 4)(x + 5) + Ex(x - 1)(x - 4)(x + 2).
\end{aligned}$$

Nyní dosazujeme za x jednotlivé kořeny polynomu $b(x)$.

$$\begin{aligned}
\text{pro } x = 0 : \quad 240 &= A(-1)(-4)2 \cdot 5 &\Rightarrow 240 &= 40A, \\
\text{pro } x = 1 : \quad 108 &= B1(1-4)(1+2)(1+5) &\Rightarrow 108 &= -54B, \\
\text{pro } x = 4 : \quad 1944 &= C4(4-1)(4+2)(4+5) &\Rightarrow 1944 &= 648C, \\
\text{pro } x = -2 : \quad 108 &= D(-2)(-2-1)(-2-4)(-2+5) &\Rightarrow 108 &= -108D, \\
\text{pro } x = -5 : \quad 2430 &= E(-5)(-5-1)(-5-4)(-5+2) &\Rightarrow 2430 &= 810E,
\end{aligned}$$

potom $A = 6, B = -2, C = 3, D = -2, E = 3$. Potom

$$\frac{9x^4 + 15x^3 - 78x^2 - 78x + 240}{x^5 + 2x^4 - 21x^3 - 22x^2 + 40x} = \frac{6}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+5}.$$

□