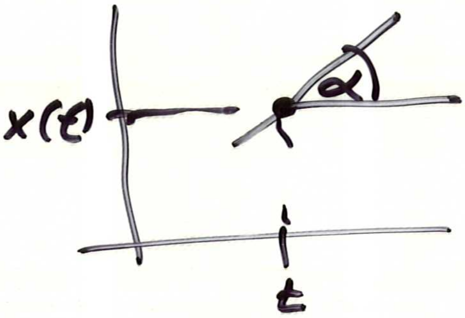
# GEOMETRICKÝ VÝZNAM ŘCE ~~$y'=f(x,y)$~~ $x'=f(t,x)$ (*)

- $x(t)$ ... řešení úlohy ~~$y'=f(x,y)$~~ $x'(t)=f(t,x)$
- $(t, x(t))$ z množiny $D$ – máme přiřazen směr.
  → vedeme úsečku o směrnici $x'(t)$ (tj. $f(t,x(t))$)

$$\operatorname{tg}\alpha = x'(t) = f(t,x(t))$$



$\boxed{\text{SMĚROVÉ POLE}}$

- množina směrů v $\forall$ bodě $(t,x(t)) \in D$

- Pozn: řešením rovnice (*) jsou pak křivky, které se tohoto směrového pole dotýkají!

- $\boxed{\text{INTEGRÁLNÍ KŘIVKA}}$
  - graf řešení $x=x(t)$

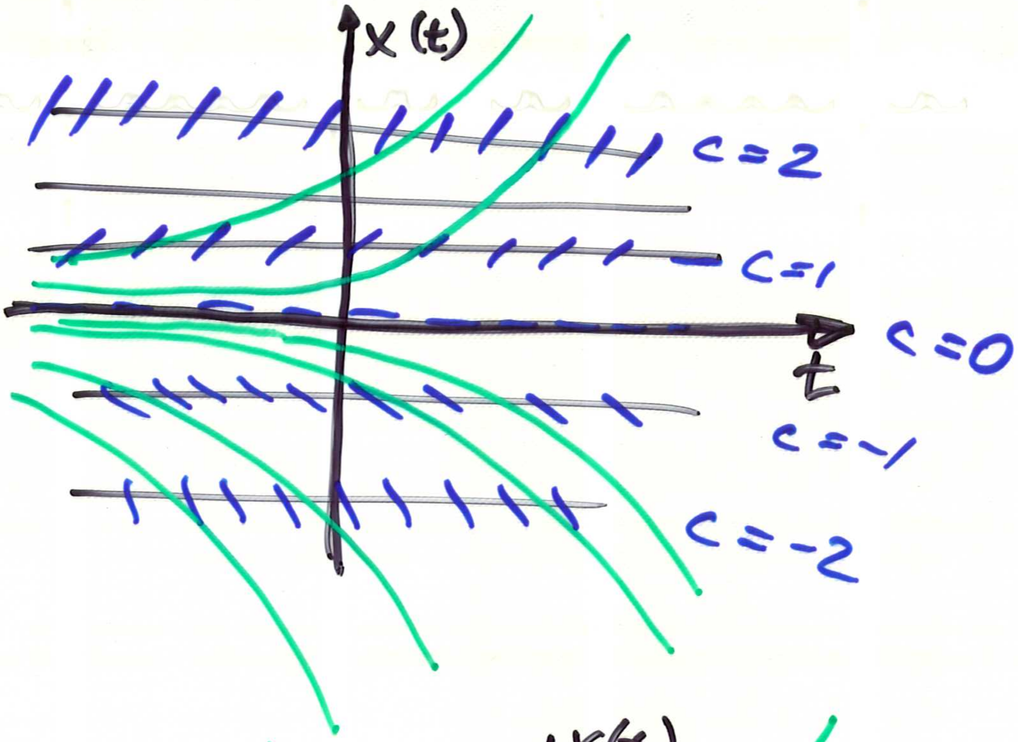
- $\boxed{\text{IZOKLINA}}$
  - množina bodů v $D$, v nichž je funkce $f(t,x)$ konstantní!

$$f(t,x)=C \; ; \; C\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{PŘ}}$

$$x'(t)=x(t)$$

izokliny: $x=C \; ; \; C\in\mathbb{R}$



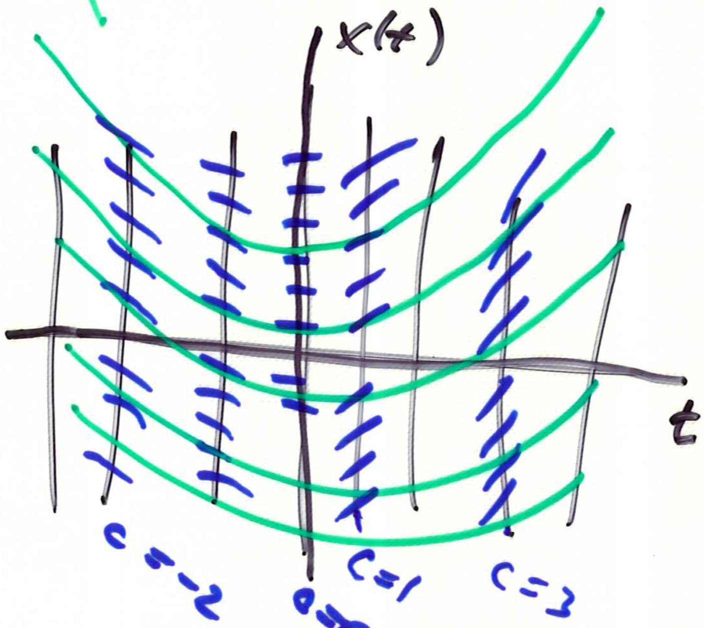

$\boxed{\text{Př}}$ $x'(t) = t$

izokliny: $t = c$

$c = 1$

$c = 3 \quad t = 3$

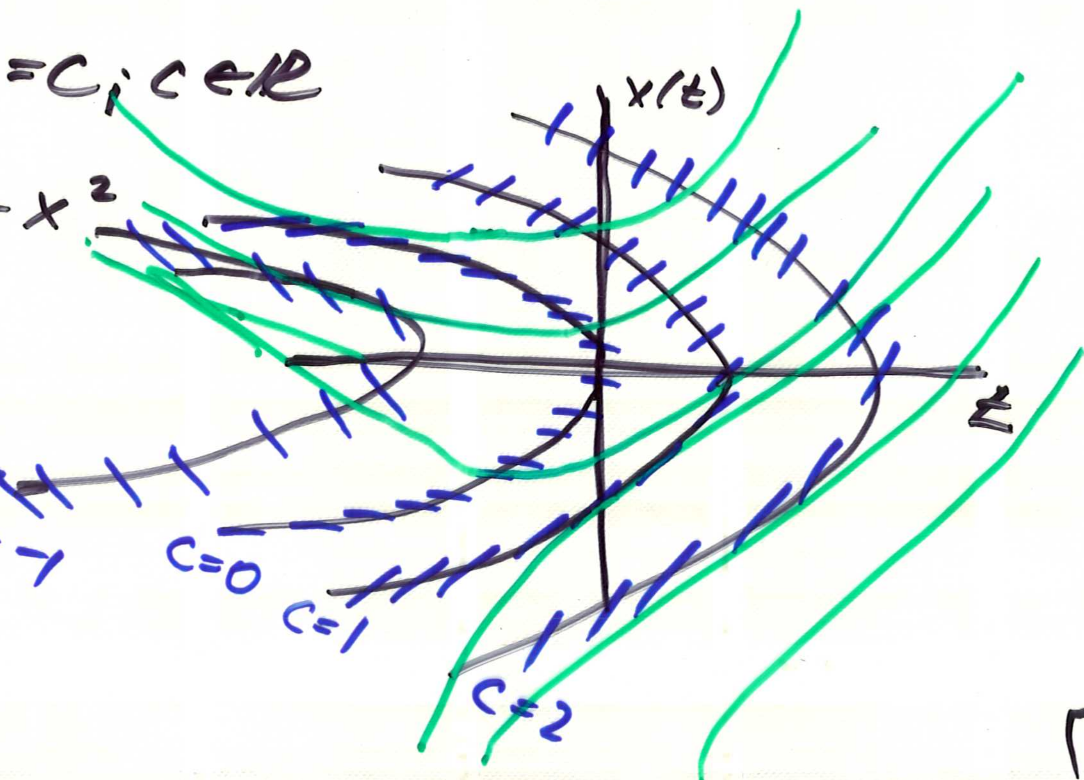
$c = 0 \quad t = 0$

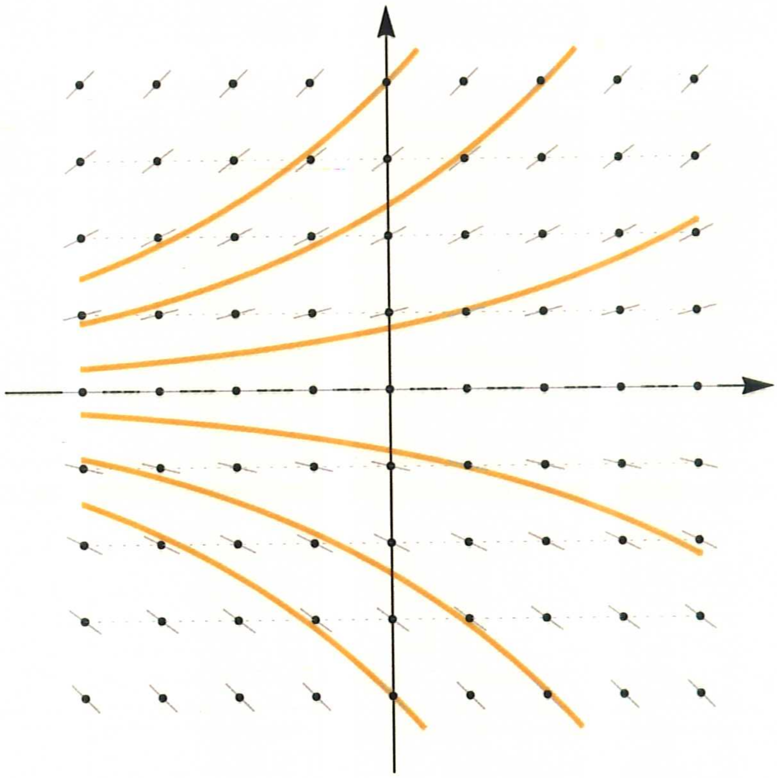



$\boxed{\text{Př}}$ $x' = x^2 + t$

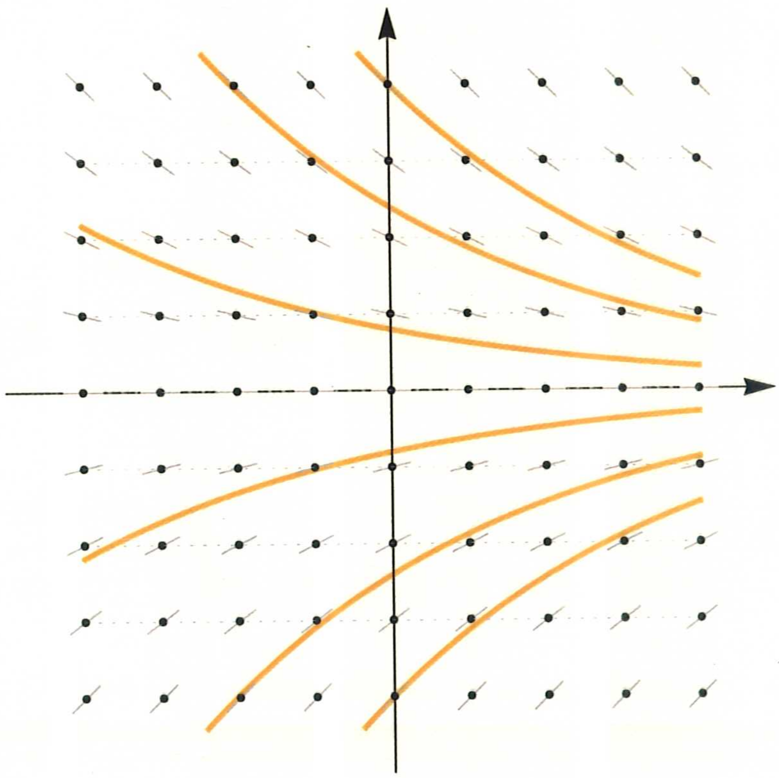
izokliny: $x^2 + t = c, \; c \in \mathbb{R}$

$t = c - x^2$

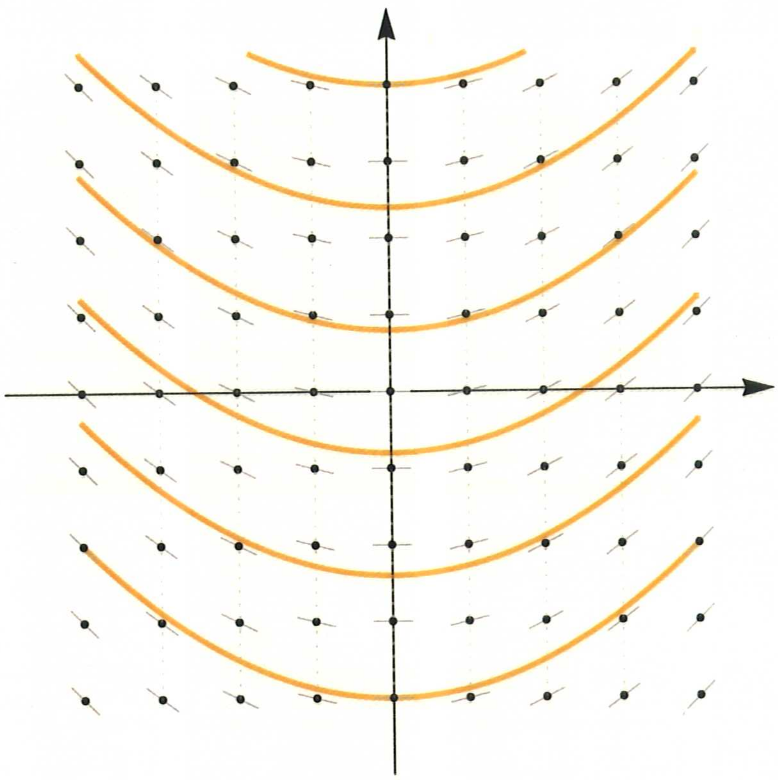




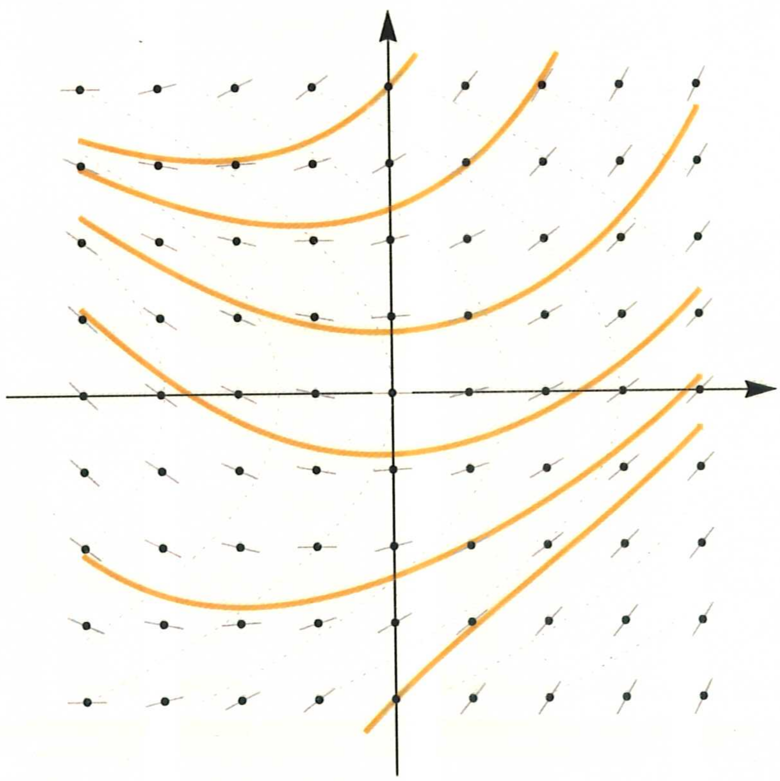
Obrázek 3: Integrální křivky rovnice $x'(t) = x(t)$



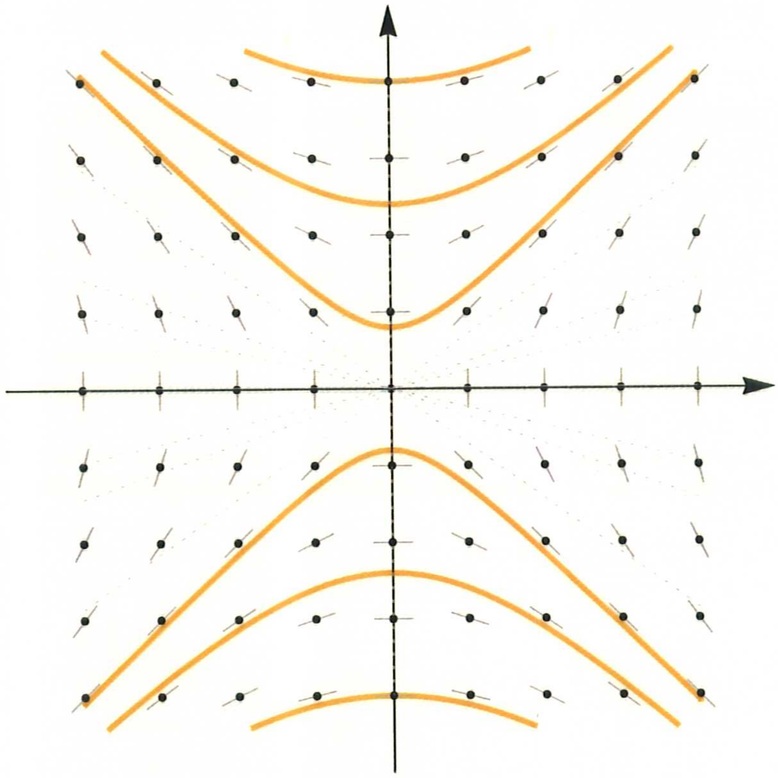
Obrázek 4: Integrální křivky rovnice $x'(t) = -x(t)$



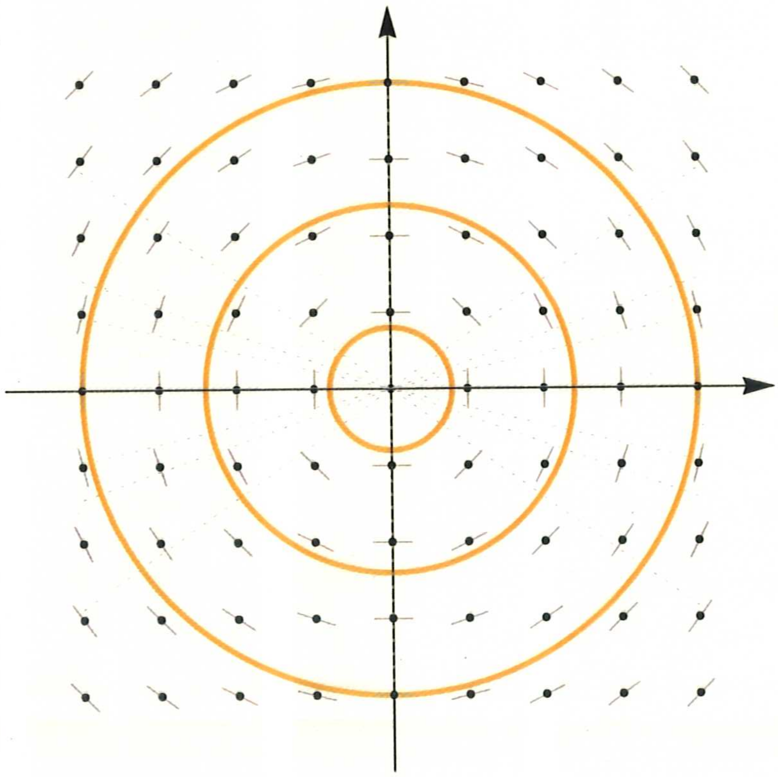
Obrázek 5: Integrální křivky rovnice $x'(t) = t$



Obrázek 6: Integrální křivky rovnice $x'(t) = x^2(t) + t$



Obrázek 1: Integrální křivky rovnice $x'(t) = t/x(t)$



Obrázek 2: Integrální křivky rovnice $x'(t) = -t/x(t)$

# METODY ŘEŠENÍ DR. 1. ŘÁDU

- neexistuje žádná univerzální metoda řešení
- náš cíl: stanovení | obecného řešení
  | řešení P.Ú.

• METODA PŘÍMÉ INTEGRACE

$$x'(t) = f(t) \quad ; t \in I$$ – "pravá strana nezávisí na $x$"

- obecné řešení: stanovení primitivní fce k $f$

$$x(t) = F(t) + C \quad ; \quad F(t) = \int f(\tilde{t})\,d\tilde{t}$$

- počáteční úloha:
  - stanovení $C$, tak, aby $x(t)$ splňovalo počáteční podmínku

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t_0) = F(t_0) + C$$

•
$$x'(t) = f(t)$$

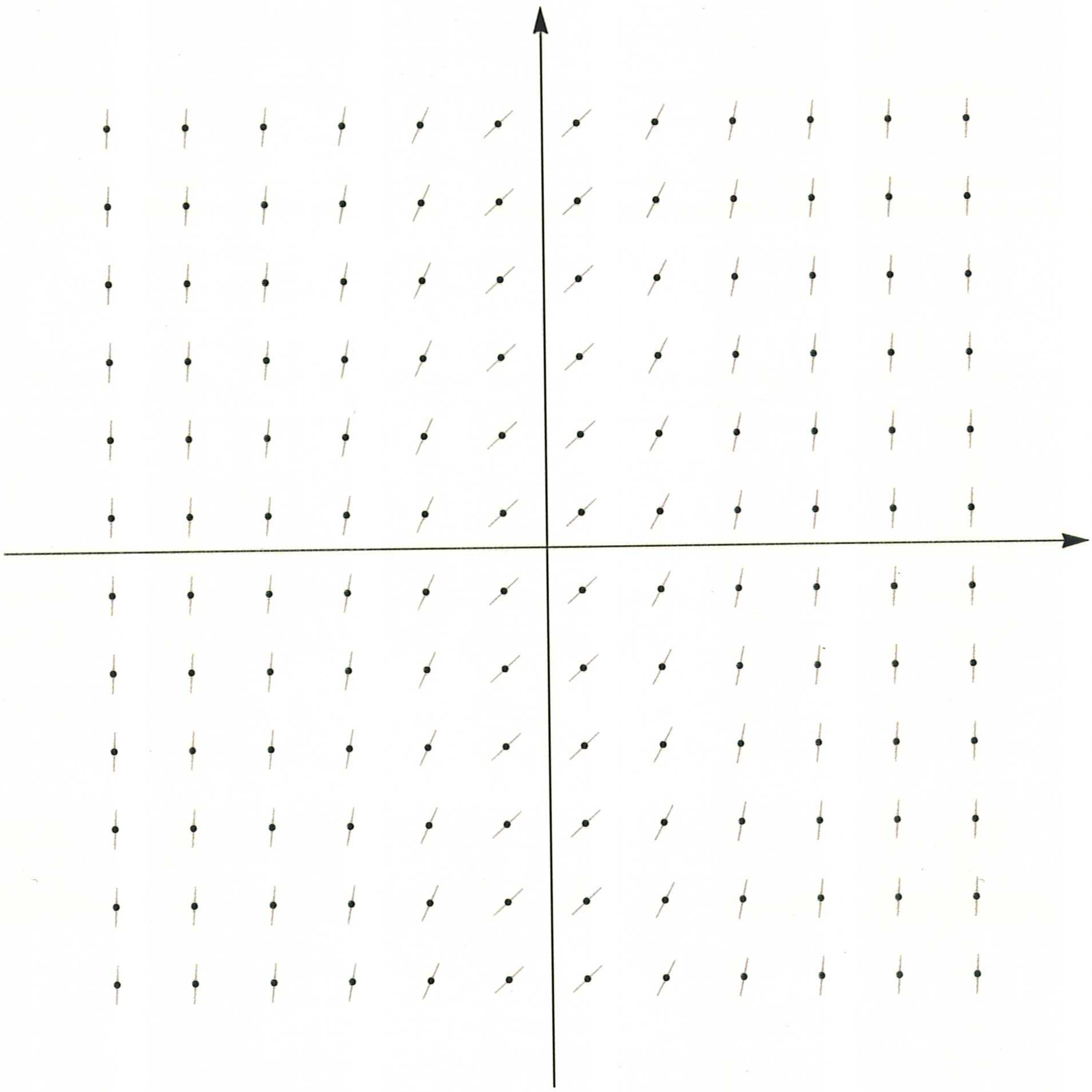
$$\int_{t_0}^{t} x'(\tilde{t})\,d\tilde{t} = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt$$

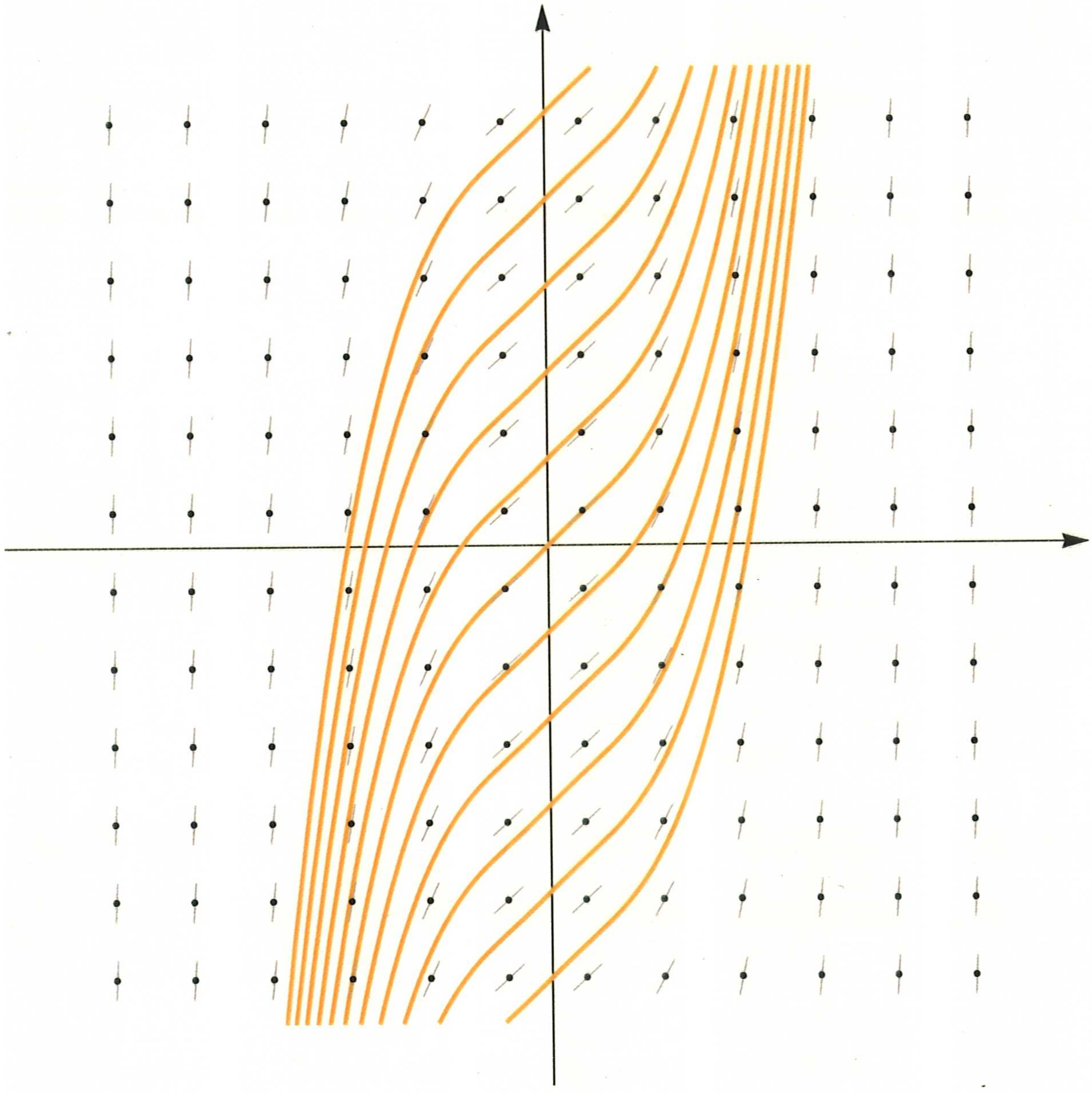
**PE**

$$x'(t) = t^2 + \frac{1}{1+2t^2}$$

$$x(t) = \ldots = \int t^2 + \frac{1}{1+2t^2}\,dt = \ldots \text{viz kolega} = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t) + C$$



Obrázek 1: Směrové pole rovnice $x'(t) = t^2 + \frac{1}{1+2t^2}$



Obrázek 2: Integrální křivky rovnice $x'(t) = t^2 + \frac{1}{1+2t^2}$

# SEPARACE PROMĚNNÝCH

nechť $f \in C(a,b)$; $g \in C(c,d)$; $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (c,d)$,

potom řešení poč. úlohy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t)\, g(x) \ ; \ t \in I \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

lze zapsat ve tvaru

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds \quad \forall t \in I$$

Dk.

$$x'(t) = f(t)\, g(x(t))$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt$$

$x(t) = s$

$x'(t)\, dt = ds$

$t_0 \to x(t_0) = x_0$

$t \to x(t)$

$\Rightarrow$

$\blacksquare$

Pozn.:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = f(t)\, g(x)$$

$$\boxed{\frac{1}{g(x)}\, dx = f(t)\, dt}$$

výsledek

$\Rightarrow$ separace proměnných lze chápat jako rovnost diferenciálů.

PR

$x y y' = 1 - x^2 \;;\; y = y(x)$

$y y' = \frac{1-x^2}{x}$

$y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x} \quad / \cdot dx$

$y\, dy = \frac{1-x^2}{x} dx$

$y \frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x}$

$\int y\, dy = \int \cancel{x\, dx} \; \frac{1-x^2}{x} dx$

$\boxed{\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C} \qquad y = \mp\sqrt{2\ln|x| - x^2 + \tilde{C}}$

---

PR

$y' \operatorname{tg} x - y = a$

$y' \operatorname{tg} x = a + y$

$\int \frac{dy}{a+y} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$

$x = y \Rightarrow a^x = a^y$

$\ln|a+y| = \ln|\sin x| + C$

$e^{\ln(a+y)} = e^{\ln|\sin x| + C} = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^C = k\, e^{\ln|\sin x|}$

$\boxed{|a+y| = k \cdot |\sin x|} \Rightarrow \left( y = k|\sin x| - a \right) \; y > a \qquad -a - y = k x$

$y = -k \cdot \sin x - a \quad y < a$

---

PR

$(x y^2 + x)\, dx + (y - x^2 y)\, dy = 0$

$(y - x^2 y)\, dy = (-x y^2 - x)\, dx$

$y(1 - x^2)\, dy = -x(1 + y^2)\, dx$

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{-x}{1-x^2}\,dx \quad \dots$$

$\vdots$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C \quad / \cdot 2$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln|1+y^2|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C} = k \cdot e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}$$

$$\sqrt{1+y^2} = k \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$$\ln|1+y^2| = \ln|1-x^2| + C$$

$$1+y^2 = \cancel{\ln}|1-x^2| \cdot k$$

$\boxed{\ddot{P}r}$

$y'\sqrt{\quad}$