LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

$$x'(t) = f(t, x(t)) = a(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

$a(t)$ ... koeficient rce
$b(t)$ ... pravá strana rovnice

Pokud $b(t) \equiv 0$ ... (1) ... homogenní lineární rce
$a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$ .. (1) .. rce s konstantním koeficientem

HOMOGENNÍ ROVNICE $(b(t) \equiv 0)$ $\quad x'(t) = a(t)x(t)$

- nechť $x_1(t)$, $x_2(t)$ jsou řešením (1), pak i $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, je řešením (1).

Důkaz: DCV

Poznámka: nulová fce je vždy řešením (1)

Řešení: $x'(t) = a(t)x$

$$\int \frac{dx}{x} = \int a(t)\,dt \quad \dots \to x(t) = C e^{\int a(t)dt}$$

ROVNICE NEHOMOGENNÍ (S PRAVOU STRANOU)

→ řešení hledáme tzv. metodou VARIACE KONSTANTY.

- ① řešíme homogenní rovnici

$$x(t) = C \cdot h(t)$$

② provedeme variaci konstanty

$$x(t) = c(t) \cdot h(t)$$

$$x'(t) = c'(t)z(t) + c(t)\cdot z'(t) = a(t)\cdot c(t)\cdot z(t) + b(t)$$

$$c'(t)z(t) + c(t)\cdot\big[\underbrace{z'(t) - a(t)\,z(t)}_{0\ \ldots\ z \text{ je řešením } z' = a\cdot z}\big] = b(t)$$

$$c'(t) = \frac{b(t)}{z(t)} \Longrightarrow c(t) = \underbrace{\int \frac{b(t)}{z(t)}\,dt + C_0}$$

Řešení nehomogenní rce je ve tvaru:

$$x(t) = c(t)\cdot z(t) = \left[\int \frac{b(t)}{z(t)}\,dt + C_0\right]\cdot z(t)$$

$\boxed{\text{Př}}$

$$x' = t\cdot x + \boxed{e^{3t}} = b(t)$$

① homogenní rce:

$$x'(t) = t\cdot x(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = t\,x(t)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int t\,dt$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

$$|x| = e^{\frac{t^2}{2}}\cdot e^{C}$$

$$x = \pm e^{C} e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$x = k\cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

② Variace konstant

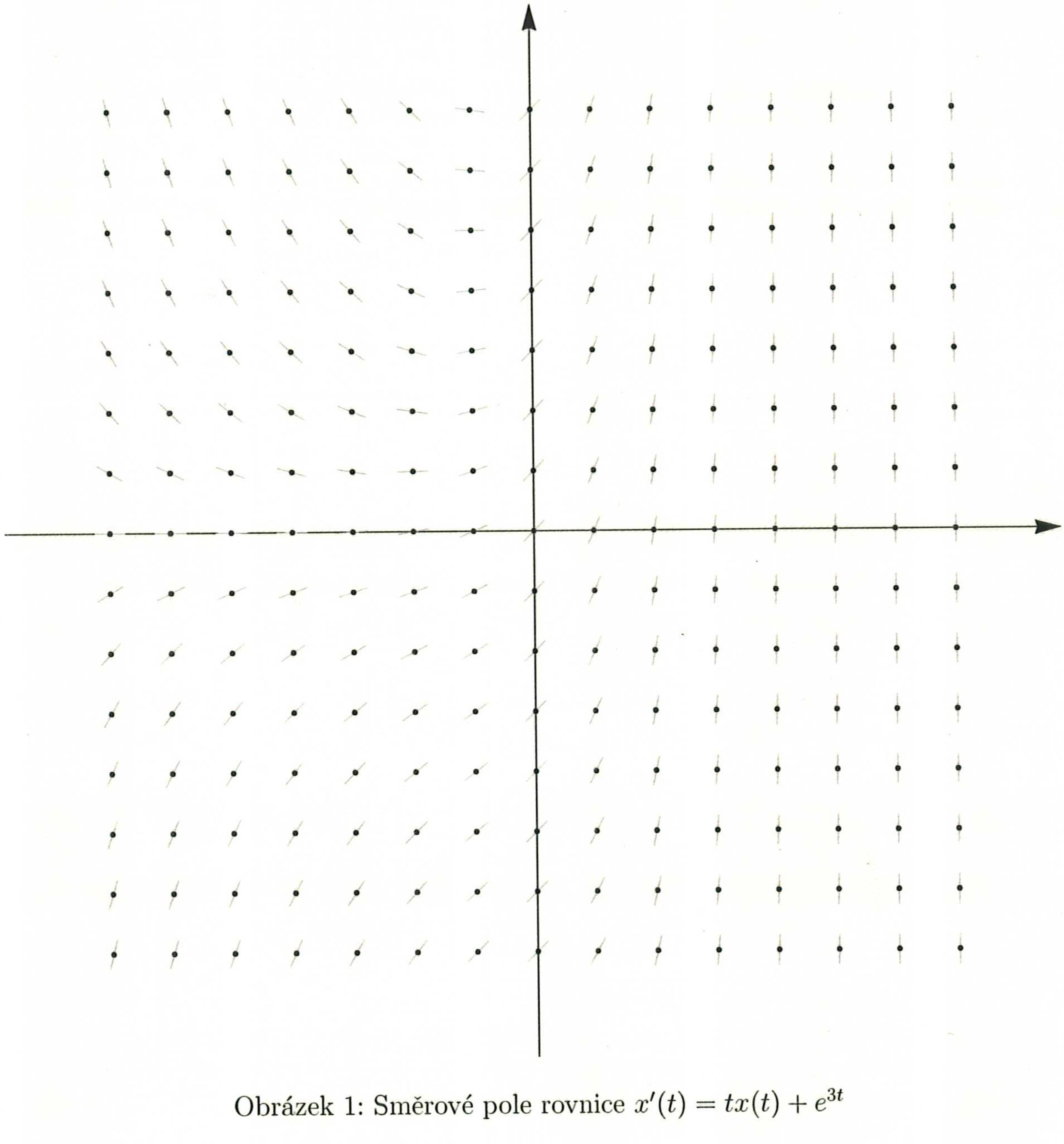
$$x(t) = k(t)\cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$x'(t) = k' e^{\frac{t^2}{2}} + k e^{\frac{t^2}{2}}\cdot t = t\cdot k e^{\frac{t^2}{2}} + e^{3t}$$

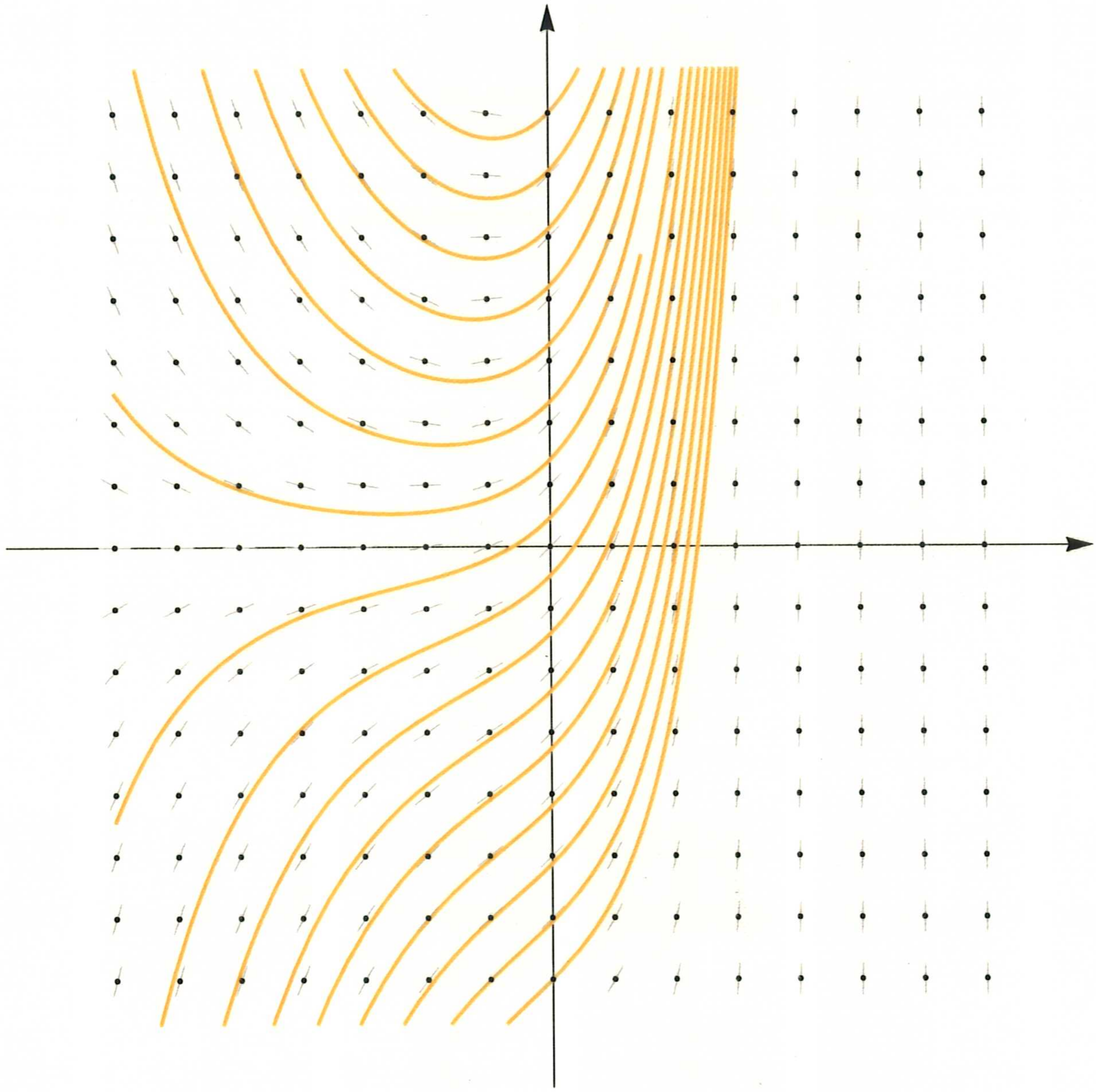
$$k' e^{\frac{t^2}{2}} = e^{3t}$$

$$k' = e^{3t - \frac{t^2}{2}}$$

$$k = \int e^{3t - \frac{t^2}{2}}\,dt + C$$



Obrázek 1: Směrové pole rovnice $x'(t) = tx(t) + e^{3t}$



Obrázek 2: Integrální křivky rovnice $x'(t) = tx(t) + e^{3t}$

PŘ

$$xy'(x) - 2y(x) = 2x^4$$

① **homogenní rce**

$$xy' - 2y = 0$$

$$xy' = 2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + C = \ln|x|^2 + C$$

$$|y| = |x|^2 \cdot e^C = x^2 e^C$$

$$y = Kx^2$$

② **Variace konstant**

$$y(x) = K(x)\cdot x^2$$

$$y' = K'x^2 + 2x\cdot K$$

$\leftarrow y$

$$x(K'x^2 + 2Kx) - 2K\cdot x^2 = 2x^4$$

$$K'x^3 = 2x^4$$

$$K' = 2x$$

$$K = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

③ **Řešení**

$$\boxed{y(x) = (x^2 + C)x^2 = Cx^2 + x^4}$$

$\boxed{\text{PŘ}}$ $y = x(y' - x\cos x)$; $y = y(x)$

① homogenní rce

$$y = xy'$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$|y| = |x| \cdot e^c$$ diskuse

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

② Variace konstant

$$y(x) = k(x) \cdot x$$

$$y' = k'x + k$$

$$k \cdot x = x(k'x + k - x \cdot \cos x)$$

$$k'x = x \cdot \cos x$$

$$k' = \cos x \Rightarrow k = \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

③ Řešení

$$y(x) = k(x) \cdot x = (\sin x + C)x = \underline{x \sin x + Cx}$$

JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ
$y' = f(x, y(x))$

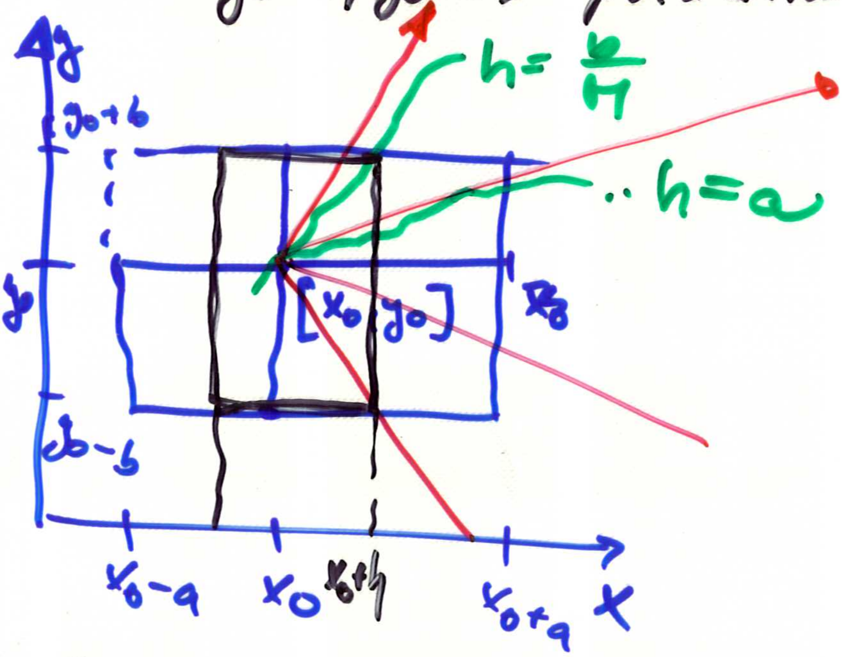
Věta (PICARDOVA)

Nechť $f \in C(D)$; kde $D = \langle x_0 - a, x_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$

$M = \max\limits_{[x,y] \in D} |f(x,y)|$; $h = \min \{ a, \frac{b}{M} \}$, f lipschitzovská

vzhledem k y.

Potom existuje právě jedno řešení $y(x) : \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle \to$
$\to \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$ počáteční úlohy $\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$.



Princip důkazu:

1) sestrojíme posloupnost fcí

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}, y_n(\tilde{x}))\, d\tilde{x}$$

2) ukážeme konvergenci této posloupnosti

Pozn. metoda řešení p.ú. pomocí vytvoření posloupnosti, jež se nazývá **PICARDOVA ITERAČNÍ METODA**

PŘ

$$\begin{cases} x' = x \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_0 = 1$$

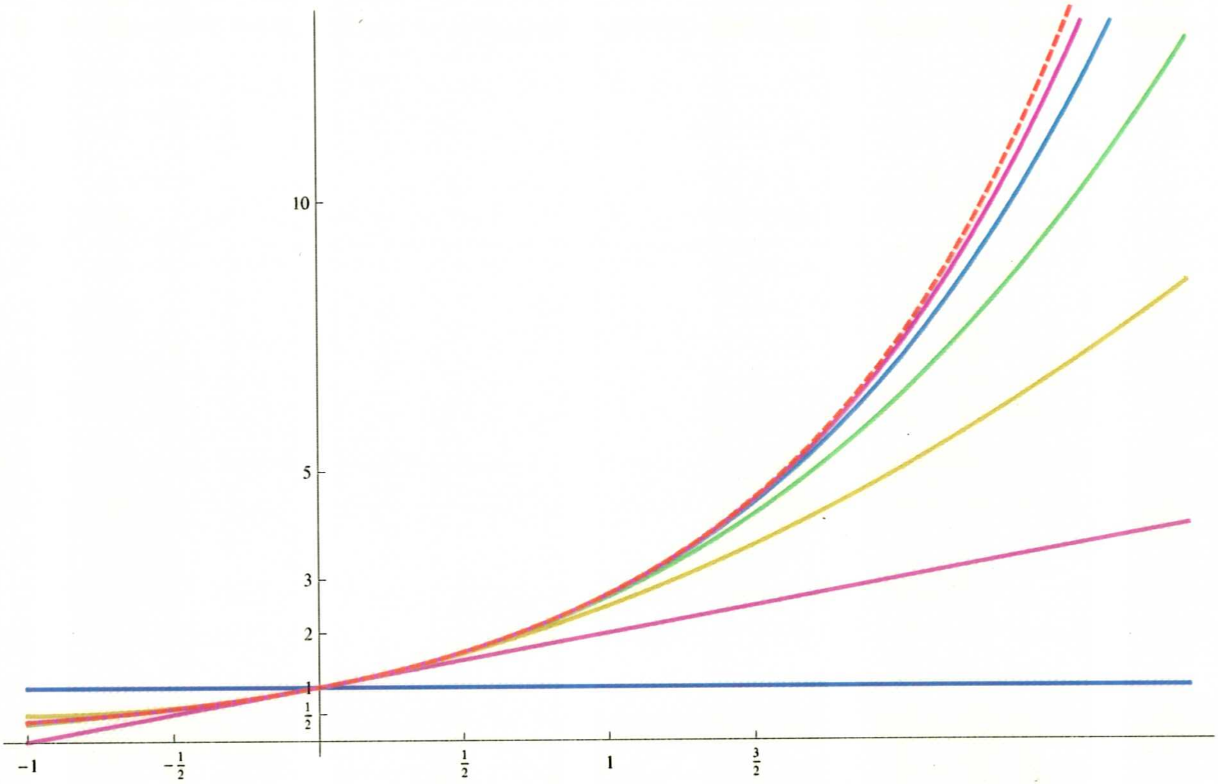
$$x_1 = 1 + \int_0^t 1 \, dt = 1 + t$$

$$x_2 = 1 + \int_0^t 1 + t \, dt = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$x_3 = 1 + \int_0^t 1 + t + \frac{t^2}{2} \, dt = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

$$\vdots$$

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Obrázek 1: Picardovy aproximace pro rovnici $x'(t) = x(t)$