3 - Domácí cvičení č. 3

Příklad 3.1. V lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ jsou zvoleny tři lineárně nezávislé prvky u, v, w. Ukažte, že prvky $u+v$, $u+w$, $v+w$ jsou také lineárně nezávislé.

Příklad 3.2. V lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ jsou zvoleny čtyři lineárně nezávislé prvky u, v, w, z. Jsou prvky $u+v$, $v+w$, $w+z$, $u+z$ také lineárně nezávislé?

Příklad 3.3. V lineárním vektorovém prostoru $\mathbb{R}_n$ jsou tři prvky
$u = [x+x_1, x+x_2, x+x_3, ..., x+x_n]^T$,
$v = [y+x_1, y+x_2, y+x_3, ..., y+x_n]^T$,
$w = [z+x_1, z+x_2, z+x_3, ..., z+x_n]^T$,
kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ jsou nenulová, navzájem různá čísla, $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.
Ukažte, prvky u, v, w jsou lineárně závislé.

Příklad 3.4. Ukažte, že množina $\mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{L}$. Určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{V}$. Ukažte, že prvek $y \in \mathcal{V}$ a určete $\widehat{y}$ souřadnice prvku y v bázi podprostoru $\mathcal{V}$.

1. $\mathcal{V} = \{[2a-b+c+3d-5e, a+2b+2c-d+e, -a+3b+c+2d+12e,$
   $3a+b-3c+d+e, -2a+b+c+d+7e, 5a+2b+c-3d-8e]^T : a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$, $y = [-8, 13, 45, -17, 30, -26]^T$;
2. $\mathcal{V}$ je generován prvky $g_1 = [1,2,-3,4,0,1]^T$, $g_2 = [0,1,2,-1,2,-3]^T$, $g_3 = [2,-1,1,3,-2,0]^T$,
   $g_4 = [3,2,0,6,0,-2]^T$, $g_5 = [0,6,-5,4,4,-1]^T$,
   $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$, $y = [-1, 19, -6, 5, 18, -13]^T$;
3. $\mathcal{V} = \{(a-2b+c-5e)x^5+(2a+b+c+4d-2e)x^4+(-a+b+c+d+7e)x^3+(3a+2b+c+6d-3e)x^2+$
   $(4a-3b+c+2d-16e)x+(-a+2b+c+2d+9e) : a,b,c,d,e \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$, $y = -10x^5+13x^4-2x^3+24x^2-x+4$;
4. $\mathcal{V} = \{\begin{bmatrix} 4a+3b+6c-11d & 2a-5b+16c-25d & -3a+4b-17c+27d \\ 5a+2b+11c-19d & 7a-3b+27c-44d & 8a-2b+28c-46d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,2}$, $y = \begin{bmatrix} 59 & -29 & 12 \\ 58 & 29 & 46 \end{bmatrix}$;
5. $\mathcal{V}$ je generován prvky $g_1 = x^3-2x^2+x+1$, $g_2 = x^3+x^2-2x+1$, $g_3 = x^3+x^2+x-2$,
   $g_4 = -2x^3+x^2+x+1$,
   $\mathcal{L} = \mathcal{P}_3$, $y = -5x^3+x^2-2x+16$.

Příklad 3.5. V lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ dimenze n je pevně zvolena báze b_1, b_2,...,b_n. Rozhodněte, zda podmnožina $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$. Pokud $\mathcal{W}$ je podprostor, určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{W}$.

1. $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} : v = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_{n-1}b_{n-1} + 2c_1b_n, c_1, c_2, ..., c_{n-1} \in \mathbb{R}\}$;
2. $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} : v = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_{n-1}b_{n-1} + c_nb_n, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$
   $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^n c_{n-1} + (-1)^{n+1} c_n = 0, \}$;
3. $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} : v = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_{n-1}b_{n-1} + c_nb_n, c_1 - c_2 = 1, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}\}$;

4. $\mathcal{W} = \{v \in \mathcal{V} : v = c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_{n-1}b_{n-1} + c_nb_n, c_1 - c_2 = 0, c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 3.6. Je dána reálná matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,2} : \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$. Určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{V}$.

Příklad 3.7. Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,2} : \mathbf{BA} = \mathbf{0}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$. Určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{V}$.

Příklad 3.8. Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,2} : \mathbf{BA} - \mathbf{2B} = \mathbf{0}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$. Určete dimenzi a bázi podprostoru $\mathcal{V}$.

Příklad 3.9. Je dána pevně zvolená matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2,2}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,2} : \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ v závislosti na zvolené matici $\mathbf{A}$.

Příklad 3.10. Je dána pevně zvolená matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2,2}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,2} : \mathbf{BA} = \mathbf{0}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,2}$. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ v závislosti na zvolené matici $\mathbf{A}$.

Příklad 3.11. Je dána pevně zvolená matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3,k}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,3} : \mathbf{BA} = \mathbf{0}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,3}$. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ v závislosti na zvolené matici $\mathbf{A}$.

Příklad 3.12. Je dána pevně zvolená matice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3,k}$. Ukažte, že množina

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2,3} : \mathbf{BA} - \mathbf{2B} = \mathbf{0}\}$$

je podprostor prostoru $\mathcal{M}_{2,3}$. Určete dimenzi podprostoru $\mathcal{V}$ v závislosti na zvolené matici $\mathbf{A}$.

Příklad 3.13. V lineárním vektorovém prostoru $\mathcal{L}$ jsou dány podprostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$. Určete dimenzi a alespoň jednu bázi prostorů $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $\mathcal{U} + \mathcal{V} = \langle U \cup V \rangle$.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
   $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [1, 2, 1, -1, 1]^T$, $u_2 = [0, -1, 2, 2, -2]^T$, $u_3 = [1, 1, 3, 1, -1]^T$,
   $\mathcal{V}$ je generován prvky $v_1 = [-1, -7, 0, 9, -7]^T$, $v_2 = [2, 1, -1, 2, 0]^T$, $v_3 = [0, -13, -1, 20, -14]^T$.

2. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_6$,
   $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = [1, 1, 1, -2, 1, 0]^T$, $u_2 = [2, 0, -1, 1, -1, 2]^T$, $u_3 = [0, 1, 2, 0, 1, -1]^T$, $u_4 = [3, 2, 2, -1, 1, 1]^T$,
   $\mathcal{V} = \{[a - b - 8d, -2a + 5b + c + 4d, -3a + 10b + 2c + 10d, a - 3b - c - 14d, -2a + 6b + c + 10d, a - 6b + 3c - 12d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

3. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_4$,
   $\mathcal{U}$ je generován prvky $u_1 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $u_2 = -2x^4 + 3x^2 - 2x$, $u_3 = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$,
   $\mathcal{V}$ je generován prvky $v_1 = 3x^4 + x^3 - 3x + 2$, $v_2 = -x^4 + 2x^2 + x - 1$, $v_3 = x^4 - x^3 + x^2 - x + 3$, $v_4 = 3x^4 + 3x^2 - 3x + 4$.

4. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,3}$,
   $\mathcal{U} = \{\begin{bmatrix} a + 2c - d & 2a + b - c & -a + 2b + c - 2d \\ b + 2c + d & a - b + d & a + b - 2c \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$,
   $\mathcal{V} = \{\begin{bmatrix} a + 3b - c - 4d & a + 2c + 5d & 2a + b + d \\ a + 2b - c - 3d & 2a - b + 3d & -a + 2c + 3d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.