1 - Domácí cvičení č. 1

Příklad 1.1. Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$, napište reálný rozklad a rozklad polynomu na kořenové činitele.

1. $p(x) = x^5 + 4x^4 - 17x^3 - 64x^2 - 4x + 80$,
2. $p(x) = x^7 - 14x^5 + 10x^4 + 45x^3 - 62x^2 + 60x - 72$,
3. $p(x) = 2x^6 + 2x^5 - 36x^4 + 4x^3 - 78x^2 + 2x - 40$,
4. $p(x) = x^6 + x^5 - 29x^4 + 10x^3 + 76x^2 + 232x - 480$,
5. $p(x) = x^6 + 729$,
6. $p(x) = x^8 - 256$.

Příklad 1.2. Určete všechny kořeny polynomu $p(x)$ a napište rozklad polynomu na kořenové činitele.

1. $p(x) = x^6 - 9x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 1$,
2. $p(x) = x^6 - 6x^5 - 21x^4 + 52x^3 - 21x^2 - 6x + 1$,
3. $p(x) = x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1$,
4. $p(x) = x^6 - 3x^5 - 17x^4 + 17x^2 + 3x - 1$.

Příklad 1.3. Napište reálný rozklad a rozklad na kořenové činitele polynomu $p(x)$.

1. $p(x) = 6x^5 - 13x^4 + 7x^3 - 11x^2 + x + 2$,
2. $p(x) = 24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60$,
3. $p(x) = 45x^6 + 111x^5 + 56x^4 - x^3 - 63x^2 - 8x + 4$,
4. $p(x) = 48x^6 + 44x^5 + 32x^4 + 19x^3 - 22x^2 - 25x - 6$.

Příklad 1.4. Určete polynom $d(x)$ - největší společný dělitel a polynom $n(x)$ - nejmenší společný násobek polynomů $p(x)$ a $q(x)$.

1. $p(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$, $q(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2$,
2. $p(x) = x^5 - 2x^4 + x - 2$, $q(x) = x^4 + (\sqrt{2} - 2)x^3 - 2(1 + \sqrt{2})x^2 - (2 + 3\sqrt{2})x - 3$,
3. $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 13x^2 + 28x + 12$,
4. $p(x) = x^6 + 9x^5 + 21x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 21x - 4$, $q(x) = x^5 - 2x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 2x + 1$,
5. $p(x) = 9x^5 + 3x^4 - 74x^3 - 51x^2 + 7x + 6$, $q(x) = 3x^5 - 15x^4 + 6x^3 + 51x^2 - 63x + 54$,
6. $p(x) = 12x^6 - 19x^5 - 25x^4 - 47x^3 + 127x^2 + 72x - 36$,
   $q(x) = 75x^6 - 115x^5 - 228x^4 + 17x^3 + 59x^2 - 4$.

Příklad 1.5. Určete čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby a, b, c byly kořeny polynomu $p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$.

Příklad 1.6. Určete $A, B \in \mathbb{R}$ tak, aby polynom $p(x) = Ax^{n+1} - Bx^n + 1$ měl dvojnásobný kořen $c = 1$.

Příklad 1.7. Určete $A, B \in \mathbb{R}$ tak, aby polynom $p(x) = Ax^{n+1} - Bx^n - 2$ měl dvojnásobný kořen $c = 1$.

Příklad 1.8. Určete $A, B \in \mathbb{R}$ tak, aby polynom $p(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

Příklad 1.9. Dokažte, že jeden kořen polynomu $p(x) = 36x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ se rovná součtu dvou zbývajících kořenů.
Návod: pokud α, β, γ jsou kořeny polynomu $p(x)$, počítejte $S = (\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)$. Využijte vyjádření $(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)$, $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ a $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha + \beta + \gamma)$ pomocí výrazů $(\alpha + \beta + \gamma)$, $(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma)$.