

Maticová algebra, soustavy lineárních rovnic

1. Jsou dány matice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ a $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Určete :

- matice A^T a B^T , tj. transponované matice k matici A a k matici B .
- součin $A \cdot B$

2. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

3. Vypočtěte inverzní matici A^{-1} k matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a proved'te zkoušku.

4. Nalezněte všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic:

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$$

$$3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0$$

$$-x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0.$$

5. Pomocí Cramerova pravidla (tj. s užitím determinantů) vyřešte soustavu:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2.$$

Reálné funkce jedné reálné proměnné

1. Určete definiční obory funkcí f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$f_1: y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}, \quad f_2: y = \sqrt{\ln(x+4)}, \quad f_3: y = \sqrt[3]{\cos x}, \quad f_4: y = \arcsin \frac{2x+1}{3}.$$

2. Je dána složená funkce $F(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 3x + 3)}$

a) Určete elementární funkce f, g, h tak, aby $F(x) = f(g(h(x)))$.

b) Určete definiční obor funkce F .

c) Je funkce F sudá, lichá nebo periodická? Zdůvodněte proč.

3. K funkci $f: y = x^2 - 1, x \in \langle 0, \infty \rangle$ najděte inverzní funkci f^{-1} a načrtněte oba grafy.

Určete definiční obory $D(f), D(f^{-1})$ a obory hodnot $H(f), H(f^{-1})$ obou funkcí.

4. Načrtněte grafy funkcí f, g, h :

$$f: y = |x^2 + 6x + 8|, \quad g: y = \ln(x+1) + 2, \quad h: y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

5. Načrtněte grafy funkcí f, g, h těchto vlastností:

a) $f: D(f) = \mathbb{R}, \forall x \geq 0$ je funkce klesající, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$.

b) $g: D(g) = \mathbb{R}$, funkce je na celém $D(g)$ rostoucí a zdola omezená, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $f: D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$

V úlohách **6.-12.** vypočítejte limity bez použití l'Hospitalova pravidla:

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 6}$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}$

8. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{x+5}$

9. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+1}{x-4}$ $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+1}{x-4}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{x-4}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{(x-4)^2}$

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + x + 7}{2x^2 + 5x - 7}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 9x - 5}{12x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2}$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3})$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - x - 2} \right)$

- 13.** a) Určete body nespojitosti funkce $f : y = \frac{x-2}{x^2-8x+12}$.
 b) Pokud je to možné, dodefinujte funkci f tak, aby byla spojitá na celém definičním oboru.
 c) Načrtněte graf této funkce f .
- 14.** Z definice derivace (tj. pomocí limity) vypočítejte derivaci funkce $f : y = x^2 + 3$ v bodě $x_0 = -5$.

V úlohách **15.-18.**

- a) Určete definiční obory $D(f), D(g)$ funkcí f, g .
 b) Určete obor $D(f'), D(g')$ a vypočítejte první derivace funkcí f, g .

15. $f : y = 4x^3 + x^2 + 6x - 2$ $g : y = \sqrt{x} + x^2 \cdot \sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

16. $f : y = e^x + 2^x + 5 \cdot \arctg x$ $g : y = x^3 \cdot \ln x$

17. $f : y = \frac{x-1}{x+5}$ $g : y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - 1}$

18. $f : y = e^{7x} + e^{-x} + \sqrt{2x-10}$ $g : y = \sin(\ln(x^4 + 4^x))$

19. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte limity: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2^x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)}$

20. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = 3x^5 - x^4 - 4x + 5$ v bodě $x_0 = 1$.

21. Určete monotonii a lokální extrémy funkce $y = \arctg(x^4 - 8x^2 + 1)$.

22. Najděte absolutní extrémy funkce $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ na intervalu $\langle 0, 3 \rangle$.

23. Najděte inflexní body funkce $f : y = x^3 + \frac{x^4}{4}$ a zjistěte, kde je funkce konvexní a kde konkávní.

24. Vyšetřete průběh grafu funkce: $y = \frac{x+2}{x^2}$

(Návod: Určete definiční obor D , limity v krajních bodech D , extrémy, monotonii, inflexní body, konkávititu, konvexitu, asymptoty a na závěr nakreslete graf.)