Maticová algebra, soustavy lineárních rovnic

1. Jsou dány matice $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$ a $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

Určete :

a) matice A^T a B^T, tj. transponované matice k matici *A* a k matici *B*.

$A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $B^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$

b) součin $A\cdot B$

$A\cdot B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 0\end{bmatrix}$

2. Vypočtěte determinant $\begin{vmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = 96$

3. Vypočtěte inverzní matici A^{-1} k matici $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ a proveďte zkoušku. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

4. Nalezněte všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic:

$x_1+3x_2+2x_3+x_4=0$

$2x_1+7x_2+3x_3+3x_4=0$

$3x_1+7x_2+8x_3+5x_4=0$

$-x_1-4x_2-x_3-2x_4=0.$

$[x_1, x_2, x_3, x_4]^T=[-5t, t, t, 0]^T, \ t\in R$

∞ řešení

5. Pomocí Cramerova pravidla (tj. s užitím determinantů) vyřešte soustavu:

$x_1-2x_2+x_3=11$

$2x_1+x_2+2x_3=12$

$x_1-2x_2-2x_3=2.$

$[x_1, x_2, x_3]^T=[4, -2, 3]^T$

1 řešení

Reálné funkce jedné reálné proměnné

1. Určete definiční obory funkcí f_1, f_2, f_3, f_4:

$f_1: y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}}$, $\quad D_f = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$

$f_2: y = \sqrt{\ln(x+4)}$, $\quad D_f = \langle -3, +\infty)$

$f_3: y = \sqrt[3]{\cos x}$, $\quad D_f = R$

$f_4: y = \arcsin \dfrac{2x+1}{3}$. $\quad D_f = \langle -2, 1 \rangle$

2. Je dána složená funkce $F(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 3x + 3)}$

a) Určete elementární funkce f, g, h tak, aby $F(x) = f(g(h(x)))$.

$h(x) = x^2 - 3x + 3$, $g(h) = \ln(h(x))$, $f(g) = \sqrt{g(h(x))}$

b) Určete definiční obor funkce F.

$D_f = (-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$

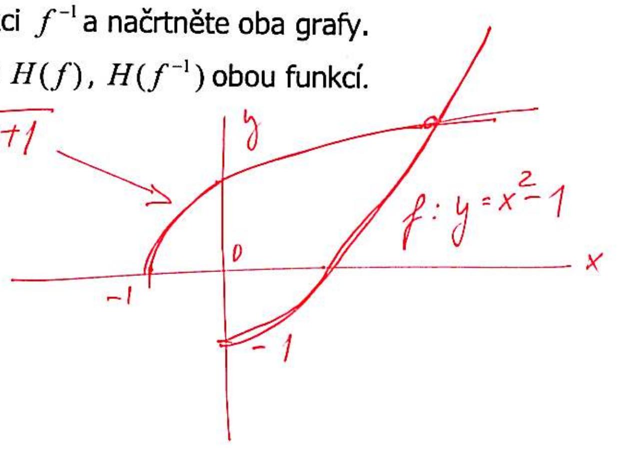
c) Je funkce F sudá, lichá nebo periodická? Zdůvodněte proč.

není sudá ani lichá, protože D_f není symetrický podle počátku 0

3. K funkci $f: y = x^2 - 1$, $x \in \langle 0, \infty)$ najděte inverzní funkci f^{-1} a načrtněte oba grafy. Určete definiční obory $D(f)$, $D(f^{-1})$ a obory hodnot $H(f)$, $H(f^{-1})$ obou funkcí.

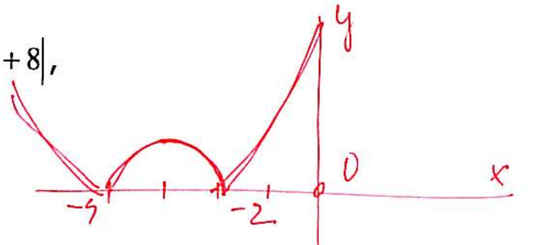
$D_f = H_{f^{-1}} = \langle 0, +\infty)$ $\quad f^{-1}: y = \sqrt{x+1}$

$H_f = D_{f^{-1}} = \langle -1, +\infty)$

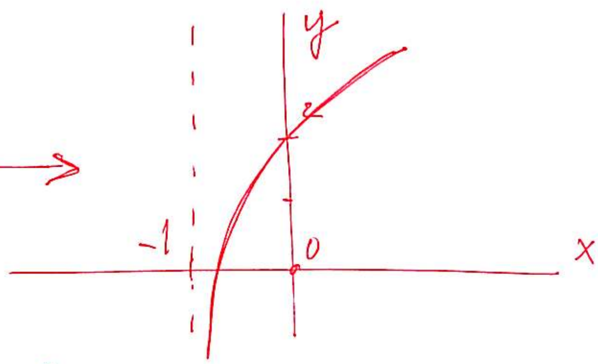


4. Načrtněte grafy funkcí f, g, h:

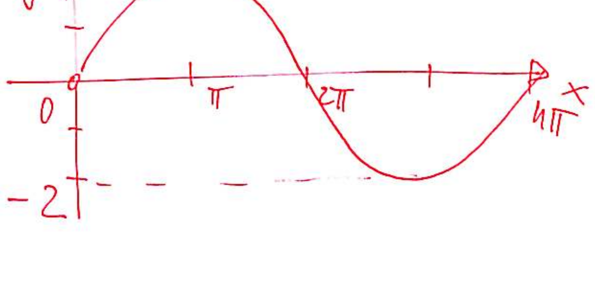
$f: y = |x^2 + 6x + 8|$,



$g: y = \ln(x+1) + 2$,



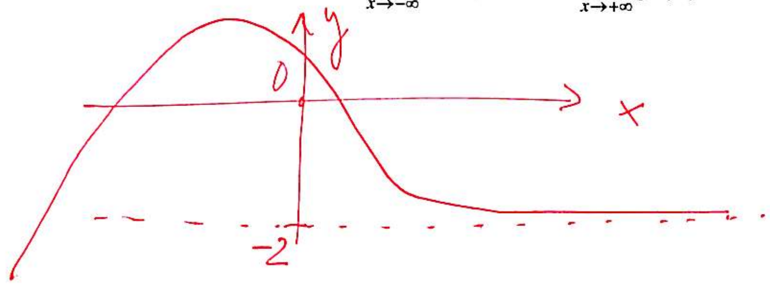
$h: y = 2.\sin(\frac{x}{2})$.



5. Načrtněte grafy funkcí f, g, h těchto vlastností:

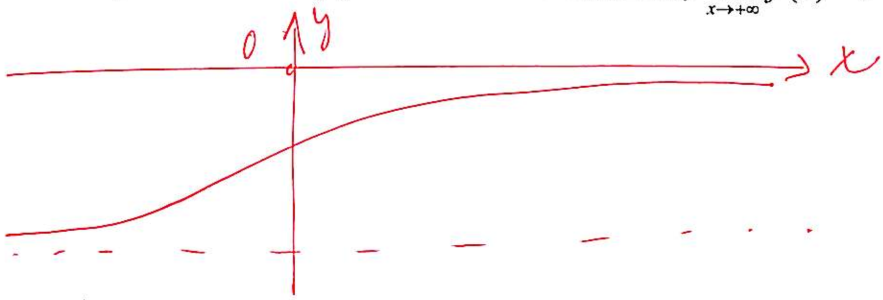
a) $f: D(f) = R$, $\forall x \geq 0$ je funkce klesající, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$.

např.



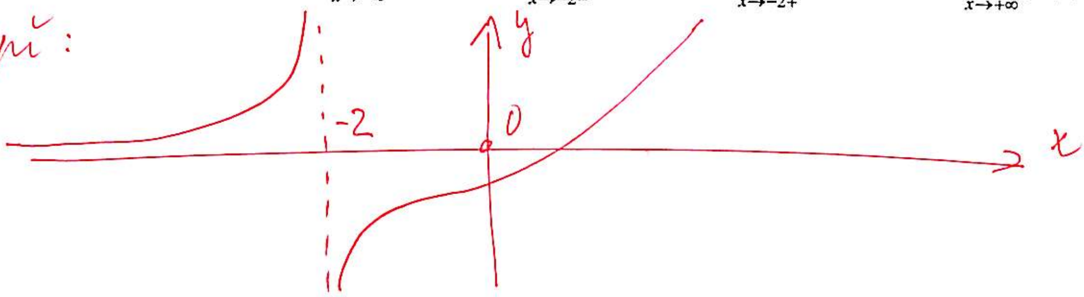
b) $g: D(f) = R$, funkce je na celém $D(f)$ rostoucí a zdola omezená, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

např.:



c) $f: D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to -2-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -2+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

např.:



V úlohách **6.-12.** vypočítejte limity bez použití l´Hospitalova pravidla:

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 + x - 1} = -\dfrac{3}{2}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 7x} = -\dfrac{2}{7}$ $\quad \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 5x + 6} = -2$ $\quad \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3} = \dfrac{1}{2}$

8. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{x + 5} = 0$

9. $\lim\limits_{x \to 4+} \dfrac{x+1}{x-4} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 4-} \dfrac{x+1}{x-4} = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+1}{x-4}$ neex. $\quad \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+1}{(x-4)^2} = +\infty$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x^2 + x + 7}{2x^2 + 5x - 7} = 3$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 9x - 5}{12x - 3} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2} = 0$

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3} \right) = 0$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln \dfrac{2x^2 + x - 1}{2x^2 - x - 2} \right) = 0$

13. a) Určete body nespojitosti funkce $f: y = \dfrac{x-2}{x^2-8x+12}$.

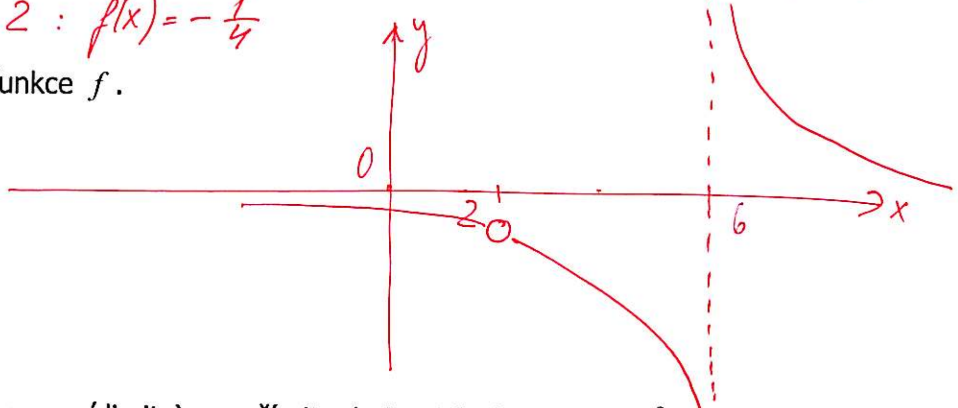
$x = 2$
$x = 6$

b) Pokud je to možné, dodefinujte funkci f tak, aby byla spojitá

v bodě $x = 2$: $f(x) = -\frac{1}{4}$

v bodě $x = 6$ nelze

c) Načrtněte graf této funkce f.



14. Z definice derivace (tj. pomocí limity) vypočítejte derivaci funkce $f: y = x^2 + 3$ v bodě $x_0 = -5$.

$$\lim_{x \to -5} \frac{x^2+3-28}{x+5} = \underline{\underline{-10}}$$

V úlohách **15.-18.**
a) Určete definiční obory $D(f), D(g)$ funkcí f, g.
b) Určete obor $D(f'), D(g')$ a vypočítejte první derivace funkcí f, g.

15. $f: y = 4x^3 + x^2 + 6x - 2$

$y' = 12x^2 + 2x + 6$ $\quad D_f = D_{f'} = R$

$g: y = \sqrt{x} + x^2.\sqrt{x} + \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x}}$

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ $\quad x \neq 0$

16. $f: y = e^x + 2^x + 5.arctgx$

$y' = e^x + 2^x \cdot \ln 2 + \frac{5}{1+x^2}$ $\quad x \in R$

$g: y = x^3.\ln x$

$y' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$

17. $f: y = \dfrac{x-1}{x+5}$

$x \neq -5$

$y' = \frac{6}{(x+5)^2}$

$g: y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x - 1}$

$y' = \frac{\sin x - \cos x + 1}{(\cos x - 1)^2}$

$\cos x \neq 1$
tj. $x \neq 2k\pi,\ k \in Z$

$D_f = \langle 5, +\infty)$

18. $f: y = e^{7x} + e^{-x} + \sqrt{2x-10}$

$y' = 7e^{7x} - e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{2x-10}}$ $\quad D_{f'} = (5, +\infty)$

$g: y = \sin(\ln(x^4 + 4^x))$

$y' = \frac{\cos \ln(x^4+4^x) \cdot (4x^3 + 4^x \cdot \ln 4)}{x^4 + 4^x}$ $\quad x \in R$

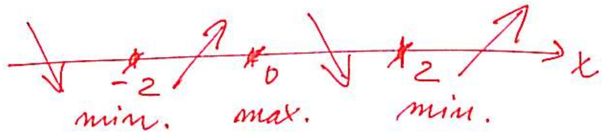
19. Pomocí l´Hospitalova pravidla vypočítejte limity: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{2^x} = 0$; $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)} = 1$

20. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y=3x^5-x^4-4x+5$ v bodě $x_0=1$.

$T[1,3]$, tečna: $y=7x-4$, normála $y=-\frac{1}{7}x+\frac{22}{7}$

21. Určete monotonii a lokální extrémy funkce $y=arctg(x^4-8x^2+1)$.

$D_f=R$ $\quad y'=\dfrac{4x^3-16x}{1+(x^4-8x^2+1)^2}$



22. Najděte absolutní extrémy funkce $y=x^3-9x^2+24x-10$ na intervalu $\langle 0,3\rangle$.

$y'=3x^2-18x+24$

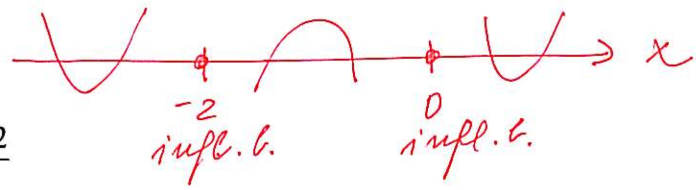
$x=0$ min. $y=-10$

$x=2$ max. $y=10$

23. Najděte inflexní body funkce $f: y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$ a zjistěte, kde je funkce konvexní a kde konkávní.

$y'=3x^2+x^3$

$y''=6x+3x^2$



24. Vyšetřete průběh grafu funkce: $y=\dfrac{x+2}{x^2}$

$D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x+2}{x^2}=0$

$\lim\limits_{x\to0\pm}\dfrac{x+2}{2}=+\infty$

$y'=\dfrac{-(x+4)}{x^3}$

-4 min, 0

$y''=\dfrac{2x+12}{x^4}$

-6 infl. b., 0