SOUSTAVA (LINEÁRNÍCH) DIFERENCIÁLNÍCH RC 1. ŘÁDU

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases} \qquad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \qquad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{bmatrix} f_1(t, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{y}) \end{bmatrix}$$

→ <u>Cauchyova úloha</u>: Řešením je vektorová fce $\vec{y}(t)$: splňuje (1) v každém bodě a navíc splňuje (2).

LINEÁRNÍ ROVNICE: $f(t, y(t)) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

Pozn (jednoznačnost řešení)

- Picardova věta: je lokální jednoznačnost zaručena Lipschitzovskostí $\vec{f}$ vzhledem k proměnné $\vec{y}$.

Pozn. 2

Pro lineární rovnici máme jednoznačnost zaručenu spojitostí $A(t)$

HOMOGENNÍ SOUSTAVA

$b(t) \equiv 0$ $\quad \vec{y}\,'(t) = A(t)\cdot y(t) \quad$ (H)

Lemma

Nechť $y_1(t), y_2(t)$ jsou řešením (H), pak i $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ jsou řešením (H).

Důkaz Přímo: DCV

Důsledek $y(t) \equiv 0$ je řešením (H)

Důsledek je-li $y_1(t) \dots y_k(t)$ řešením (H), pak

i $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(t)$ je řešením (H)

→ nyní nás budou zajímat lineárně nezávislá řešení (H)

Definice Soubor funkcí $y_1(t) \dots y_k(t)$ se nazývá lineárně nezávislý (LN) na I pokud

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(t) = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0 \quad \forall t \in I$$

Př

- $\{x, 2x\}$ na $[0,1]$ … LZ
- $\{1, x, x^2\}$ na $[0,1]$ $\quad a\cdot 1 + b\cdot x + c\cdot x^2 = 0$ … LN
- $\{x, |x|\}$ na $[0,1]$ … LZ
- $\{x, |x|\}$ na $[-1,1]$ … LN
- $\{x, |x|\}$ na $[-1,0]$ … LZ

Věta

Nechť prvky matice $A(t)$ jsou spojité na $\langle a,b\rangle$, potom má soustava (H) na intervalu $\langle a,b\rangle$ n lineárně nezávislých řešení!

Pozn

Systému n-LN řešení (H) nazýváme FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM (FS)

$$Y(t) = \left[\, y_1(t) \;\middle|\; y_2(t) \;\middle|\; \dots \;\middle|\; y_n(t) \,\right]$$

Definice (WRONSKIÁN)

Determinant $W(t) := \det(Y(t))$ nazýváme Wronskián soustavy řešení $y_1(t) \dots y_n(t)$ soustavy (H).

Věta

Nechť $y_1(t) \dots y_n(t)$ jsou řešením (H) v intervalu $\langle a,b\rangle$, $A(t)$ je spojitá. Potom platí:

(i) $W(t) \equiv 0$ nebo $W(t) \neq 0 \;\forall t \in \langle a,b\rangle$

(ii) Řešení $y_1(t) \dots y_n(t)$ tvoří fundamentální systém $\Leftrightarrow$ $W(t) \neq 0$

Důkaz

$\boxed{\text{PŘ}}$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} \begin{aligned} &= -\frac{1}{t(t^2+1)}\, y_1 + \frac{1}{t^2(t^2+1)}\, y_2 \\ &= \frac{-t^2}{t^2+1}\, y_1 + \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)}\, y_2 \end{aligned} \quad , t>0$$

① FS: $y_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$ $\quad y_2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{bmatrix}$

→ ověření, zda je to FS?

→ je to řešením? $y_1(t)$:

1. složka: $0 = -\frac{1}{t(t^2+1)} \cdot 1 + \frac{1}{t^2(t^2+1)} \cdot t = 0$ ✓

2. složka: $1 = \frac{-t^2}{(t^2+1)} \cdot 1 + \frac{2t^2+1}{\cancel{t}(t^2+1)}\, \cancel{t} =$

$= \frac{-t^2+2t^2+1}{(t^2+1)} = 1$ ✓

→ obdobně pro $y_2(t)$

$W(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} = t^2+1 \neq 0$ ⋯→ je to FS.

co by stačilo: ~~$W(t)$~~ $= W(1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1+1 = 2 \neq 0$

→ ok, je to FS.

$\boxed{\text{Pozn.}}$

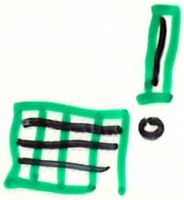
- Pokud známe FS, známe i obecné řešení $y(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i y_i(t)$.
- Dosazením $\{c_i\}_{i=1}^{N}$ získáme řešení ~~[illegible]~~ (H) + (2)

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t) \quad (N)$$

→ řešení určíme superpozicí řešení soustavy (H) a jednoho řešení úlohy nehomogenní (partikulární řešení)

METODA VARIACE KONSTANT



- předpokládáme znalost FS

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot y_i(t) = Y(t)\cdot\vec{c} \quad ; \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

- partikulární řešení y_p předpokládáme ve tvaru:

$$y_p(t) = Y(t)\cdot\vec{c}(t)$$

$$y_p'(t) = Y'(t)\vec{c}(t) + Y(t)\vec{c}'(t)$$

→ dosadíme do (N):

$$Y'(t)\vec{c}(t) + Y(t)\vec{c}'(t) = A(t)\,Y(t)\cdot\vec{c}(t) + \vec{b}(t)$$

$$\Big[\underbrace{Y'(t) - A(t)Y(t)}_{0 =}\Big]\vec{c}(t) + Y(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)$$

soustava rc pro c'

$$\boxed{Y(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t)}$$

(Y – FS; $\det Y \neq 0 \Rightarrow Y$ - reg)

$$c'(t) = Y^{-1}(t)\vec{b}(t)$$

$$c(t) = \int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt$$

$$y_p(t) = Y(t)\cdot\int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt$$

$$y(t) = Y(t)\cdot c + Y(t)\int Y^{-1}(t)\vec{b}(t)\,dt$$

$\boxed{\text{PŘ}}$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ \frac{-t^2}{t^2+1} & \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} \end{bmatrix} \quad b(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\ldots \text{FS}: \; Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det Y(t)}_{= t^2+1}} \begin{bmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^{-1}(t) \cdot b(t) = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{t^2+1} & \frac{1}{t(t^2+1)} \\ \frac{-t}{t^2+1} & \frac{1}{t^2+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{t^2+1} \begin{bmatrix} t + \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int Y^{-1}(t) b(t) = \begin{bmatrix} \int \frac{1}{t} \\ \int 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln|t| \\ 0 \end{bmatrix} = c(t)$$

.. bez konstant
(budou v y_h)

$$y(t) = Y(t) \cdot \vec{c} + Y(t) \cdot \vec{c}(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ln|t| \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$