

SOUSTAVA (LINEÁRNÍCH) DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) & (1) \quad t \in I \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases} \quad \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{f}(t, \vec{y}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(t, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(t, \vec{y}) \end{bmatrix}$$

Cauchyova úloha

- Řešení C.U. rozumíme $f_i, y(t)$: vel. (s) y splň. w
w každém bodě $I + (2)$

Jednoznačnost C.U.

- Picardova věta - Lipschitzova podmínka z $y_1 \dots y_n$
(spojitost parc. derivací)

Soustava lin. diferenciálních

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)) := A(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

- pro jednoznačnost C.U.

Ataž' spoj. mat. $A(t)$

$$\boxed{P_n} \quad \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t^2 \\ a_{12}(t) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} =: \vec{f}(t, \vec{y})$$

$$\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{bmatrix} t \cdot y_1(t) + t^2 y_2(t) \\ \ln(t) y_1(t) + y_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \begin{bmatrix} t+0 \\ \sin(t)+0 \end{bmatrix} \dots \text{spg. 16} \quad \frac{\partial f}{\partial y_2} = \begin{bmatrix} 0+t^2 \\ 0+1 \end{bmatrix} \dots \text{spg. 16}$$

→ решения (1) и (2) φ — φ — характеристический угол.

POUNICE KONOGENNI'

$$\vec{b}(t) \equiv \vec{0} \quad \vec{y}'(t) = A(t) y(t) \quad (H)$$

Gemma

Definiție: Dacă $y_1(t), y_2(t)$ sunt soluții liniar independente ale sistemului (H), atunci $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ este o soluție liniară dependentă a sistemului (H); $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dr. Kant: DCU

Du's lode $y(t) \equiv 0$ p' r' i' a' n' a' (r).

Dualität $y \cdot Li \rightarrow y_0 \dots y_m$ ~~ist~~ $\exists x \in M^m$, $pab \text{ } i'$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{y}_i^*(\epsilon) \text{ je reprezentacja } (H) \text{ , } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

→ agar' no' bade raj'rat line'hen' so'm'ish'at win' (H)

Definition

Současťou funkci $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_k(t)$ je každý 'lineárne
nezávislý' (LN) na $I \subset \mathbb{R}$, potom

$$\sum_{i=1}^K \alpha_i \vec{y}_i(t) = \vec{0} \quad \forall t \in I \Rightarrow \sum_{i=1}^K |\alpha_i| = 0$$

(Final L2)

Pr • $\{x, 2x\}$ na $[0, 1] \dots \mathbb{R}$

• $\{x, 1x1\}$ na $[0, 1] \dots \mathbb{R}$

• $\{x, 1x1\}$ na $[-1, 1] \dots \mathbb{R}$

• $\{1, x, x^2\}$ na $[0, 1]$ $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$
množina: 0, 1, 2 kořeny } $\mathbb{R}$

$\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ na $[0, 1]$ $x \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}$

Věta

Nechť pro každou matici $A(t)$ je daná spojilost na I , pak
mať (t) na I právě m - LN řešení (n ... počet řádků).

Důkaz

Pr Společně těchto m - LN řešení nazýváme
FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM (FS)

$$Y(t) = \left[\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \mid \dots \mid \vec{y}_m(t) \right]$$

Definice (Wronskian)

$W(t) := \det(Y(t))$ nazýváme Wronskian soustavy
řešení $y_1(t), \dots, y_n(t)$ soustavy rovnice (t).

Věta

Nechť $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ je řešení (t) v intervalu I a
 $A(t)$ je spojilost. Pak platí:

(i) $W(t) \equiv 0$ nbs $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(ii) Resolvem $\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ froni' FS pentru t dat, astfel
 dat $W(t) \neq 0$.

PE

$$y_1' = \frac{1}{t(t^2+1)} y_1 + \frac{1}{t^2(t^2+1)} y_2$$

$$y_2' = \frac{-t^2}{t^2+1} y_1 + \frac{2t^2-1}{t(t^2+1)} y_2$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ \frac{-t^2}{t^2+1} & \frac{2t^2-1}{t(t^2+1)} \end{bmatrix}$$

Am sa consideram $\vec{y}_0$:

$$\vec{y}_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad \hat{\vec{y}}_0(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$\vec{y}$: rezolvare matrice? an

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left\{ A(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t(t^2+1)} + \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ \frac{-t^2}{t^2+1} + \frac{(2t^2-1)t}{t(t^2+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{bmatrix} = t^2 + 1 \neq 0 \quad (\neq 0) \quad \checkmark \quad \vec{y}, \hat{\vec{y}} \text{ in } L_1$$

concluzii?

$$W(1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1+1=2 \neq 0 \quad OK.$$

NEHOMOGENÍ SOUSTAVY

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

- řešení určíme superpozicí homogenního řešení a jednoho řešení s pravou stranou $\vec{b}(t)$ (PARTIKULÁRNÍ ŘEŠ)

METODA VARIACE KONSTANT

$$\vec{y}_h(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t) = Y(t) \cdot \vec{c} \quad ; \quad c = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Partikulární řešení ve tvaru:

$$\vec{y}_p(t) = Y(t) \vec{c}(t)$$

$$y_p'(t) = Y'(t) \vec{c}(t) + Y(t) \vec{c}'(t) \leftarrow \text{VZKOUSJET!}$$

$$Y' \vec{c} + Y \vec{c}' = AY \vec{c} + \vec{b}$$

$$(Y' - AY) \vec{c}$$

$$\underbrace{Y' \vec{c} - AY \vec{c}}_{\vec{0}} + Y \vec{c}' = \vec{b}$$

$$\boxed{Y \vec{c}' = \vec{b}}$$

- soustava se vyřeší pro
mějícího vektor $\vec{c}'$

$$\rightarrow Y \text{-reg. matice} \Rightarrow c' = Y^{-1} \vec{b} \Rightarrow c(t) = \int Y^{-1}(t) \vec{b}(t) dt$$

$$c(t) = \begin{bmatrix} \int \dots \\ \int \dots \\ \int \dots \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y_p(t) = Y(t) \cdot \int Y^{-1}(t) \vec{b}(t) dt}$$

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$