listopad 2005

1 Dynamické procesy

Evoluční procesy, v nichž máme na zřeteli pouze závislost na čase t, se obvykle nazývají *dynamické procesy* a zákony jejich chování pak *dynamické zákony*

1.1 Pohybový zákon

1.1.1 Newtonův pohybový zákon

Uvažujme objekt (např. těleso) s hmotností $m = m(t)$ pohybující se s rychlostí $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$. Časově proměnná síla $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ způsobuje časovou změnu hybnosti $\mathbf{p}(t) = m(t)\mathbf{v}(t)$ $([kgms^{-1}])$.

Newtonův zákon říká, že v každém časovém úseku $\langle t_1, t_2\rangle \subset \langle a, b\rangle$ je změna (přírůstek, úbytek) hybnosti na tomto úseku dána integrálem

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt$$

a je to rovna rozdílu hybností $\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1)$.

Tedy platí

$$\mathbf{p}(t_2) = \mathbf{p}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt,\ \forall \langle t_1, t_2\rangle \subset \langle 0, T\rangle. \tag{2.1.1}$$

Zde hybnost $\mathbf{p}(t)$ hraje roli „tokové funkce“ a je evidentní, že se předpokládá její spojitost.

Rovnost (2.1.1) je časově **globální verzí** základního pohybového zákona Je-li funkce $\mathbf{F}$ **spojitá**, potom existuje $\bar{t} \in \langle t_1, t_2\rangle$, že podle věty o střední hodnotě je

$$\frac{\mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1)}{t_2 - t_1} = \mathbf{F}(\bar{t}), \quad \forall\, t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$$

Limitním procesem $t_1 \to t-$, $t_2 \to t+$, $\bar{t} \to t$,
dostaneme (proč ?)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \forall\, t \in (a, b), \tag{2.1.2}$$

což je tzv. *lokální (diferenciální)* verze téhož pohybového zákona ve **vnitřním** bodě $t \in \langle a, b\rangle$

1.1.2 Úlohy formulovatelné na základě pohybového zákona

Zákony a principy se formulují (nejen v případě pohybového zákona), abychom mohli klást otázky a hledat odpovědi týkající se chování uvažovaného dynamického systému, tj. formulovat **úlohy**, posuzovat jejicj řešitelnost a hledat řešení formulovaných úloh. Tím získáváme podrobnější informace a poravnáním s realitou můžeme **posuzovat** tzv. *korektnost* námi zvoleného modelu a provádět tzv. *validaci modelu* a *varifikaci modelu.*

1.1.3 Pohyb houpačky v gravitačním poli.

Chceme zjistit závislost výchylky $s = s(t)$ na čase (delka oblouku) a rychlost $v = v(t)$ pohybující se houpačky pro $t \in \langle t_0, \infty)$. Předpokládáme: konstantní hmotnost m, konstantní gravitační pole s gravitační konstantou g, nulový odpor prostředí proti pohybu (když neznáme odpor prostředí, tak předpokládáme vakuum), délku závěsu l je mnohonásobně delší, než rozměry houpačky a že nezávisí na čase ani na velikosti výchylky.

Za uvedených předpokládů usoudíme, že bude postačující uvažovat **fyzikální model** houpačky, a to tzv. *matematické kyvadlo.*

Matematickým modelem matematického kyvadla je odpovídající skalární tvar Newtonova pohybového zákona (2.1.2) , v němž

$$p(t) = mv(t), \quad F(t) = -mg \sin \alpha(t);$$

dynamický parametr $\alpha = \alpha(t)$ je úhlová výchylka závěsu od klidové (svislé) polohy.
Formulujeme příslušnou úlohu: Chceme stanovit funkce $s = s(t),\ v = v(t),\ t \in \langle t_0, +\infty)$ splňující relevantní pohybový zákon, když je dán počateční stav podmínkami

$$v(t_0) = v_0,\ s(t_0) = s_0,\ \alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Máme tedy tzv. *počateční úlohu*

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg \sin \alpha(t), \quad \alpha(t) = \frac{s(t)}{l},\ t \in (t_0, +\infty), \tag{2.1.3}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = v(t), \tag{2.1.4}$$

$$v(t_0) = v_0,\ s(t_0) = s_0. \tag{2.1.5}$$

V dalším volíme $v_0 = 0$ (nulová počateční rychlost). V počáteční úloze máme soustavu dvou diferenciálních rovnic pro neznáme funkce $s = s(t),\ v = v(t)$ a přislušné počateční podmínky určující **počateční stav** systému.

Teoretické výsledky (viz.např. KMA/ODR) opravňují ke konstatování, že má daná úloha jediné řešení (korektní úloha!) a funkce $s = s(t)$ je současně řešením počateční úlohy

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}, \quad t \in (t_0, +\infty) \tag{2.1.6}$$

$$s(t_0) = s_0, \quad \frac{ds(t_0)}{dt} = v_0 = 0. \tag{2.1.7}$$

Diferenciální rovnice (2.1.6) je nelineární. Abychom ke stanovení řešení mohli užít elementární metody, využujíme vtipného obratu založeného na inverzní funkci a derivaci složené funkce:

$$v = v(t);\ s = s(t)\ \rightarrow\ t = t(s)\ \Rightarrow\ v = v(t(s)) = v(s);$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Máme tedy místo (2.1.3) , resp. (2.1.6) rovnici (1.řádu)

$$v\frac{dv}{ds} = -g \sin \frac{s}{l}, \quad s \in (0, s_0), \tag{2.1.8}$$

a počáteční (koncovou) podmínku

$$v_0 = v(t_0) = v(t(s_0)) = v(s_0) = 0 \tag{2.1.9}$$

Metodou separace proměných dostaneme

$$v = v(s) = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin \frac{s + s_0}{2l} \sin \frac{s_0 - s}{2l}} = \frac{ds}{dt}$$

a tedy

$$2\sqrt{gl}dt = \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}},\ s(t_0) = s_0$$

Odtud pak můžeme pouze psát

$$\int_{s_0}^{s} \frac{d\tau}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl}(t-t_0). \tag{2.1.10}$$

Integrál nelze vypočítat pomocí elementárních funkcí a musíme se spokojit s tím, že závislost $s = s(t)$ je dána rovnicí (2.1.10), tj. rovnicí typu $\psi(s) = 2\sqrt{gl}(t - t_0)$; formálně tedy $s = \psi^{-1}\left[2\sqrt{gl}(t - t_0)\right]$

Pokud užijeme aproximace $\sin z \approx z$ (linearizace), pak z (2.1.10) dostaneme ($t_0 = 0$)

$$s(t) = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Je-li čas T takový, že $s(T) = s(0) = s_0$, pak $\cos \sqrt{\frac{g}{l}} T = 1$, a tedy

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Závěr: Vidíme, že středoškolské poznatky o pohybu matematického kyvadla se týkají výrazně zjednodušeného modelu, v němž se předpokládají pouze tzv. „malé“ výchylky (aby $\sin z \approx z$). Jestliže k lineární rovnici kyvadla

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \frac{s}{l}$$

připojíme počateční podmínky s hodnotou $s_0 > 0.1 l$, pak vypočtená funkce $s(t)$ bude mít pramálo společného s funkcí $s(t)$ určenou z (2.1.10)

1.2 Elementární úlohy opírající se o pohybový zákon

1.2.1 Padající těleso

Chceme stanovit rychlost (hybnost) a výšku padajícího tělesa o konstantní hmotnosti m v závislosti na čase t.
Následně pak chceme určit dobu pádu T a rychlost dopadu.
Předpoklady a data:

- pohyb po svislé přímce
- síla způsobující změnu hybnosti: $F(t) = mg - kv(t)$, kde k je koeficient odporu prostředí (může být $k = k(t)$), či dokonce $k = k(s)$ – v různých časech a výškách může být odpor prostředí různý).
- časový interval: $\langle t_0, T)$
- pohybový zákon:
$$\frac{d}{dt}(mv(t)) = mg - kv(t);$$
- zákon rychlosti: $\frac{ds(t)}{dt} = v(t)$
- počáteční výška: $s(t_0) = s_0$

- počáteční rychlost: $v(t_0) = v_0,\ (v_0 = 0)\,.$
- rychlost dopadu: $v(T) = ?$

Doba pádu T se určí z podmínky: $s(T) = 0\,.$

Matematickou úlohou je tzv. *počáteční* úloha pro soustavu dvou ODR 1. řádu pro hledané funkce $v = v(t)$ a $s = s(t)\,.$

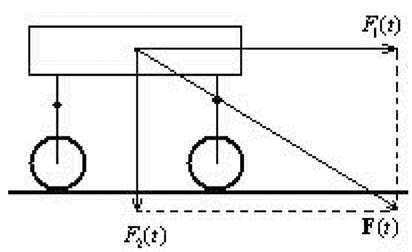
Na základě stejných zákonů můžeme formulovat *úlohu řízení*: Pro dané m a dané t_0, v_0, s_0, T stanovit řídící funkci $k = k(t)$, resp. $k = k(s)$ (režim brzdění padajícího tělesa), čas $t_1 \in \langle t_0, T\rangle$ tak, aby $v(t_1) = 0$ (ubrzdit parašutistu tak, aby „měkce“ dopadl).

Poznámka: Rozměrová analýza:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt}(mv)\right] &= \quad [mg] \quad - [kv] \\ \frac{kgms^{-1}}{s} &= \quad kgms^{-2} = [k]\, ms^{-1} \\ &\Rightarrow\ [k] = kgs^{-1}. \end{aligned}$$

1.2.2 Pohyb vozíku na nerovném terénu

Předpokládáme vodorovný pohyb vozíku způsobený tažnou silou a svislý pohyb kmitavého typu ovlivněný pružností pružiny a „nárazy“ terénu.
Dále předpokládáme pohyb **ve svislé rovině**.



Označení a data:

$$\begin{aligned} x_1 = x_1(t) &\quad \text{výchylka ve vodorovném směru} \\ x_2 = x_2(t) &\quad \text{výchylka (dráha) ve svislém směru} \end{aligned}$$

Síla působící na vozík:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{tažná síla ve vodorovném směru} \\ \text{tažná síla ve svislém směru} \end{bmatrix}.$$

Síla F_2 ovlivňující pohyb ve svislém směru závisí na tuhosti pérování, na odporu prostředí a na nerovnostech terénu, kde

$$F_2(t) = -kx_2(t) - \gamma v_2(t) - [\delta\varphi(t) + \gamma\dot{\varphi}(t)]\,,$$

$m = m(t) > 0$ hmotnost (např. $m = konst.$)
$k > 0$ koeficient tuhosti „pérování“
$\gamma \geq 0$ koeficient tlumení
$\varphi(t)$ funkce modelující časový průběh „nárazů“ terénu; její volba znamená simulaci (modelování) reálných podmínek jízdy vozíku

Pohybový zákon:

$$\frac{d}{dt}(m(t)\mathbf{v}(t)) = \mathbf{F}(t), \quad t \geq t_0,$$

Zákon rychlosti:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t).$$

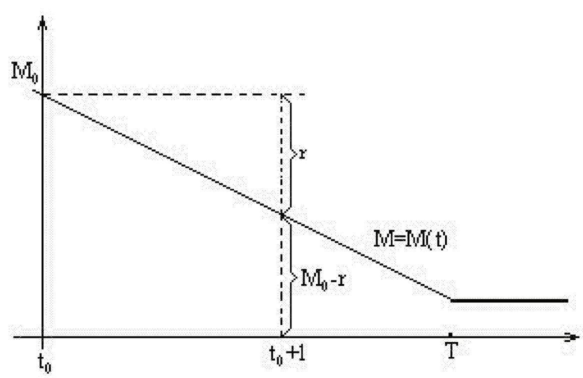
Můžene nyní formulovat počáteční úlohu a různé typy úloh řízení. Například, stanovit parametry k, γ a $\varepsilon > 0$ takové, aby $|x_2(t)| \leq \varepsilon$.

1.2.3 Pohyb rakety svislu vzhůru

Předpokládáme, že hmotnost rakety se mění s časem t lineárně:

$$M(t) = M_0 - rt,$$

kde r je úbytek hmotnosti za jednotku času.



Rozměrovou analýzou stanovíme rozměr parametru r:
$[M(t)] = [rt]$
$kg = [r]\,s \;\Rightarrow\; [r] = kgs^{-1}$;
Např. $r = 1.2\,kgs^{-1}$ znamená, že za sekundu vyhoří $1.2\,kg$ palíva.

Pohybový zákon:

$$\frac{d}{dt}(M(t)\cdot v(t)) = F - M(t)g, \quad F - \text{tažná síla motoru}$$

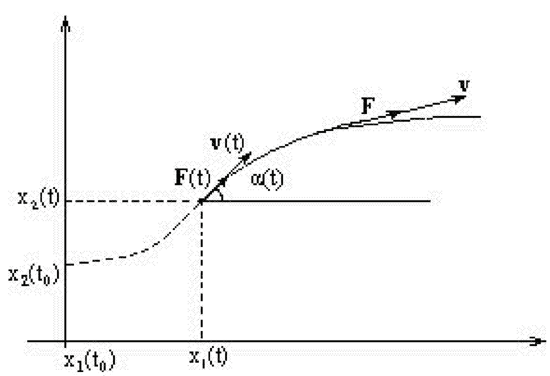
Zákon rychlosti: $\frac{ds(t)}{dt}$
Počáteční úloha: viz [MAII], str.30.
Úloha řízení: Stanovít průběh tažné síly F , tak, abychom za čas T dosáhli cílového stavu, např. $v(T) = 0$.

1.2.4 Pohyb rakety v obecném směru ve svislé rovině

Chceme popsat pohyb (dynamiku) tělesa uvedeného do pohybu v čase $t \geq t_0$ časově proměnnou silou $\mathbf{F}(t)$ popsatelnou dvourozměrným vektorem takovým, aby se pohyb „odehrával" ve svislé rovině.
Předpokládaná situace je patrná z obrázku

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ x_2 &= x_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{souřadnice polohy}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_1(t) \\ v_2 &= v_2(t) \end{aligned}\right\} \quad \text{složky vektoru rychlosti } \mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$$



$m = m(t)$ proměnná hmotnost,
$\alpha = \alpha(t)$ proměnný úhel směru tahové síly $\mathbf{F}$;

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} u(t)\cos\alpha(t) \\ u(t)\sin\alpha(t) \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{F}(t)| = u(t);$$

$q = q(u)$ daná funkce spotřeby paliva

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} \text{ síla odporu prostředí.}$$

Zákon pohybu uvažovaného systému:

$$\frac{d}{dt}(m(t)\mathbf{v}(t)) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{g}(t);$$

Bilance hmotnosti:

$$\frac{dm(t)}{dt} = -q(u).$$

Základní úlohy a dílčí úlohy:

(a) Počáteční úloha: Pro daný počáteční stav $\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0,\ m(t_0) = m_0$ určit funkce $\mathbf{v}(t), m(t),\ t \geq t_0$

(b) určit čas $T \geq t_0$, za který vyhorí paliv a popsat pohyb „prázdné“ rakety

(c) Úloha řízení: Určit řídící funkci $u = u(t)$ takovou, aby za čas T (po vyhoření paliva) se systém dostal do cíle (do cílového stavu).

(d) Úloha řízení: Určit řídící funkce $u(t), \alpha(t)$ a počáteční stav $\mathbf{v}_0, m_0$ tak, aby za čas T bylo dosaženo cíle.

Poznámka: Uvedené úlohy mohou modelovat chemické i biologické procesy. Další úlohy: teorie pronásledování, diferenciální hry (budoucí chování objektů závisí na nezávislém rozhodnutí pronásledovatele a pronásledovaného).

1.3 Jednoduché dynamické procesy v živé přírodě

1.3.1 Zákon populační dynamiky

Populací rozumíme skupinu živých organizmů jednoho biologického druhu. Více populací různých druhů se nazývá *biologické společenství.*

První model vývoje počtu jedinců v populaci jednoho druhu vytvořil anglický ekonom Malthus (1766-1834) a tento model se nazývá *Malthusův populační zákon.* Holandský matematik a biolog Verhulst asi v roce 1845 původní Malthusův model zpřesnil (tzv. Verhulstův populační zákon). Obecné bilanční předpoklady o změnách hustoty populace se nazývájí *zákony populační dynamiky.*

Označme $N(t)$ průměrnou (střední) hustotu (koncentraci) populace v uvažovaném prostoru v okamžiku t. Budeme předpokládat standardní složení populace z hlediska rozmnožování a naopak nebudeme do úvah zahrnovat zpožd'ovací efekty (těhotenství, dospívání, larvální stadium). Na základě pozorování se zda, že změna hustoty populace v každém časovém úseku $\langle t_1, t_2 \rangle$ je rovna celkovému přírůstku (úbytku) hustoty populace na tomto úseku. Tento přírůstek lze vyjádřit integrálem

$$\int_{t1}^{t_2} [M(t) + rN(t)]\, dt,$$

v němž $\int_{t1}^{t_2} M(t)dt$ je migrace v $\langle t_1, t_2 \rangle$ (M je tzv. migrační hustota) a $\int_{t1}^{t_2} rN(t)dt$ je změna vyvolaná zrozením a úmrtím. Koeficient $r > 0$ závisí na N, tj. $r = r(N)$ a určuje tzv. *relativní vitalitu* populace (porodnost minus úmrtnost) a je definován poměrem $\frac{\frac{dN}{dt}}{N}$.

Populační zákon pak zapíšeme ve tvaru

$$N(t_2) - N(t_1) = \int_{t1}^{t_2} [M(t) + rN(t)]\, dt,\ \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle a, b \rangle \tag{2.3.1}$$

Je-li $M + rN$ spojítá funkce, pak limitním důsledkem (2.3.1) je lokální tvar populačního zákona

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(N(t))N(t) + M(t), \tag{2.3.2}$$

platného v každém okamžiku $t \in (a, b)$ vyšetřovaného období $\langle a, b \rangle$.

Známe-li koeficient r a funkci $M(t)$, je korektní se ptát na hodnotu $N(t)$ pro $t > a$, známe-li $N(a)$. Odpověd' dostaneme jako řešení počáteční úlohy pro diferenciální rovnici (2.3.2) s počáteční podmínkou

$$N(a) = N_0. \tag{2.3.3}$$

Známe-li koeficient r a funkci $M(t)$ a známe-li jak počáteční stav $N(a)$, tak i koncový stav $N(b)$, není korektní se ptát na hodnotu $N(t)$ pro $t \in (a, b)$. Z (2.3.1) snadno zdůvodníme, že nelze očekávat existenci funkce $N(t) \geq 0$ splňující okrajové podmínky.

$$N(a) = N_0, \quad N(b) = N_1 \tag{2.3.4}$$

a řešící rovnici (2.3.2).

Známe-li však koeficient r a hodnoty $N(a), N(b)$, je korektní se ptát na $N(t)$ a současně na $M(t)$ pro $t \in (a,b)$. Formulujeme totiž naší otázkou tzv. *úlohu řízení*: Chceme najít takovou funkci $M(t)$ (funkce řízení) a takovou funkci $N(t)$, aby při počátečním stavu $N(a) = N_0$ byl cílový stav populace dán hodnotou $N_1 = N(b)$.

Připomeňme ještě, že pro úlohy řízení je dosti typické, že funkce $M = M(t)$ je po částech spojitá (migrační vlny, řízení typu brzda plyn v technických sytémech).

1.3.2 Malthusův a Verhulstův model populačního zákona.

Malthus předpokládal, že populační koeficient r je roven kladnému číslu a neuvažoval migraci, tj. $M(t) = 0$. Dynamika populace je pak popsána funkcí $N = N(t)$, která je řešením počáteční úlohy

$$\frac{dN}{dt} = aN,\ N(t_0) = N_0,\ t \geq t_0. \tag{2.3.5}$$

Takže

$$N(t) = N_0 e^{a(t-t_0)}$$

a znamená to, že za uvedených předpokladů (tj. relativní časová změna hustoty N je přímo úměrná hustotě N) populace roste ($N_0 > 0$) exponenciálně. Nesprávně se říká, že populace roste „geometrickou řadou“. Předpoklad konstantnosti populačního koeficientu však také znamená, že neexistují omezující či regulační faktory porodnosti. Protože je však třeba uvažovat regulační mechanizmy (zpětná vazba) at' vnitřní (adaptace organizmu) či vnější (omezenost zdrojů potravy, kapacita prostředí), je rozumné hledat věrohodnější tvar koeficientu $r = r(N)$.

Verhulst předpokládal, že r je lineární klesající funkcí proměnné N a navrhl populační koeficient ve tvaru

$$r(N) = a\left(a - \frac{N}{K}\right), \tag{2.3.6}$$

kde $a > 0, K > 0$ jsou vhodná čísla. Pro $K \to +\infty$ přechází Verhulstův model v Malthusův model. Číslo K má význam kapacity prostředí, charakterizující „přívětivost“ prostředí pro rozmnožování.

Dynamika populace je pak popsána takovou funkcí $N = N(t)$, která je řešením počáteční úlohy

$$\frac{dN}{dt} = a\left(1 - \frac{N}{K}\right)N,\ N(t_0) = N_0,\ t \geq 0. \tag{2.3.7}$$

Elementárními metodami lze stanovit řešení této počáteční úlohy pro $t_0 = 0$ ve tvaru

$$N(t) = \frac{KN_0 e^{at}}{N_0 e^{at} + K - N_0},\ t \geq 0.$$

Doporučujeme vyšetřit průběh funkce $N = N(t)$ pro různé hodnoty K, N_0, a.

1.3.3 Modely interagujících poplací.

Jestliže Malthusův model pro jednu populaci adaptujeme na situaci dvou populací s hustotami $N(t), M(t)$, lze lokální podobu příslušního zákona psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= aM(t) + bN(t)M(t) \\ \frac{dN(t)}{dt} &= cN(t) + dN(t)M(t), \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

kde a, b, c, d jsou čísla (konstanty), jejichž znaménka určují charakter vztahu obou poplací:
Model lovec-kořist: $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0,\ N\ldots$ lovec; M ...kořist.
Model soutěžení: $a > 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$;
Model symbiozy: $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$.
Doporučujeme čtenáři vyšetřit průběhy funkcí $N = N(t),\ M = M(t)$ a předebším křivky ve fázové rovině určenou parametricky uvedenými funkcemi. Každý model odráží popisovanou skutečnost v závislosti na vyslovených (a často i nevyslovených) předpokládech. Verhulstova varianta modelu (2.3.9) má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= M\left[a\left(1 - \frac{M}{K}\right) - \frac{bN}{N+c}\right], \\ \frac{dN}{dt} &= N\left[d\left(1 - \frac{hN}{M}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

kde a, K, b, c, d, h jsou kladné konstanty.

1.4 Obecný pohybový zákon v kontinuu

1.4.1 Základní východiska a slovní formulace zákona

Od doby Newtona jde stále o stejný princip. Srovnávají se časové změny hybnosti na jedné straně a sílové účinky na straně druhé.

Předpokládáme, že kontinuum (tekutina, pevná látka, směsi pevných i tekutiných částí, atd.) zaujímá oblast $\Omega \subset (\mathcal{R}^3)$ a že se části tohoto kontinua různě pohybují nebo deformují vlivem sil různého druhu (vnější síly $\equiv$ účinky vnějších silových polí.

Vlivem souhrnu těchto sil dochází ke změnám hybnosti v různých částech kontinua. K obecné formulaci *bilance hybnosti* si postupně vybudujeme pojmový aparát, abychom mohli podat dostatečně obecný popis procesů spojených se změnou hybnosti.

Slovně může být bilance hybnosti vyslovena asi takto: změna hybnosti části kontinua v libovolné bilanční oblasti $\Omega_B \subset \Omega$ a v libovolném časovém rozmezí $\langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, +\infty)$ je rovna součtu sil působících na uvažovanou část kontinua.

Matematickým východiskem je zobecnění vztahů (2.1.1), (2.1.2).

1.4.2 Hybnost

Je-li $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ $([kgm^{-3}])$ hustota kontinua v místě $\mathbf{x}$ a v okamžiku t a $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ $([ms^{-1}])$ rychlost kontinua v místě $\mathbf{x}$ a okamžiku t, pak integrál (vektor)

$$I = \int\limits_{\Omega_B} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

(Rozměr: $[I] = kgm^{-3}ms^{-1}m^3 = kgms^{-1} = Ns$)
představuje *hybnost* v celé bilanční oblasti Ω_B v okamžiku t. A integrál

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_B} \left[\rho(\mathbf{x}, t_2)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_2) - \rho(\mathbf{x}, t_1)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1)\right] d\mathbf{x} \tag{2.4.1}$$

představuje *změnu hybnosti* sektoru Ω_B v čase od t_1 do t_2.
Integrál (vektor)

$$I_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\partial\Omega_B} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \left(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x})\right) dSdt \tag{2.4.2}$$

(Rozměr: $[I_2] = kgm^{-3}ms^{-1}ms^{-1}m^2s = kgms^{-1} = Ns$)
představuje *„tok hybnosti"* hranicí $\partial\Omega_B$, tj. hybnost části kontinua vyteklého hranicí v čase od t_1 do t_2.

Poznámka: Skalární součin $\mathbf{vn} = \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$ je průmět $\mathbf{v}$ do směru $\mathbf{n}$; $(\mathbf{vn})dS$ je objem hranolu o výšce $\|\mathbf{v}\| \cos\alpha$ a obsahu podstavy dS, tj. objem „vyteklý" plochou dS; $\rho(\mathbf{vn})dS$ je hmotnost tohoto objemu; $\mathbf{v}[\rho(\mathbf{vn})dS]$ je hybnosto tohoto „proteklého" objemu v okamžiku t za jednotku času.

1.4.3 Vnější síly $\equiv$ působení vnějších silových polí.

Označíme-li $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ (Nm^{-3}) hustotu vnějších sil, potom integrál (vektor)

$$I_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_B} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt \tag{2.4.3}$$

(Rozměr: $[I_3] = Nm^{-3}m^3s = Ns$)
představuje souhrn impulsů vnějších silových polí působících v bilanční oblasti Ω_B v čase od t_1 do t_2.

Pro silové pole obvykle píšeme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t),$$

kde $[f] = ms^{-2}$ (rozměr zrychlení), $[\rho f] = Nm^{-3}$.

Pro elektrické pole píšeme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t)\mathbf{E}(\mathbf{x}, t),$$

kde $[q] = Cm^{-3}$ (hustota náboje), $[\mathbf{E}] = NC^{-1}$, $[q\mathbf{E}] = Nm^{-3}$.

K vnějším silám počítáme také odstředivé sily a Coriolisovy sily. Např. obecné elektromagnetické pole vyjadřujeme tvarem

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}, t)[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)].$$

1.4.4 Vnitřní (plošné) síly.

Do svých úvah musíme zahrnout účinky sil, které způsobují deformace nebo vnitřní pnutí. Takovým silám říkáme *třeci* a *tlakové sily* (komprese).

Představujeme si, že okolí působí na každou bilanční oblast plošně, tj. na každou část φ jeji hranice $\partial\Omega_B$ ve smyslu akce a reakce.

Označíme toto plošné silové působení vektorem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad [\mathbf{T}] = Nm^{-2},$$

v němž zdůrazňujeme, že tyto silové účinky působí na plochu φ orientovanou jednotkovým vektorem normály $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ v bodě $\mathbf{x} \in \varphi$.

Plošný integrál

$$\int_{\varphi} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t\mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS = \int_{\varphi} \mathbf{T} d\mathbf{S}$$

nemůže být vhodnou globální charakteristikou (rozměrově je to v pořádku), protože je skalární a nikoliv vektorovou charakteristikou (o třech složkách).

Představujeme si, že vektor $\mathbf{T}$ můžeme vyjádřit jako součet dvou vektorových složek

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_\tau.$$

Normálová složka $\mathbf{T}_n$ má tlakové účinky a tečná složka $\mathbf{T}_\tau$ má smykové účinky v tečné rovině k, φ.

Ukázalo se nejvhodnější představit si jednoznačný rozklad vektoru $\mathbf{T}$ na tři vektorové složky

$$\mathbf{T}_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad j = 1, 2, 3,$$

jednu normálovou a dvě tečné. Označíme

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \tau_{3j} \end{bmatrix}, \ j = 1, 2, 3.$$

Integrál (vektor)

(2.4.4)
$$I_4 = \begin{bmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{T}_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{T}_2(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \\ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{T}_3(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}(\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS \end{bmatrix}$$

reprezentuje silové působení vnitřních plošných sil.

Globální bilance hybnosti zapíšeme nyní stručně

(2.4.5.)
$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4.$$

Slovně: Změna hybnosti+tok hybnosti = vnější síly+ vnitřní síly.

Limitováním této rovnosti $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ dostaneme (ve složkách)

(2.4.6)
$$\int_{\partial\Omega_B} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_B} \rho(\mathbf{x}, t) v_i(\mathbf{x}, t)(\mathbf{v}\mathbf{n}) dS = \int_{\Omega_B} F_i(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \\ + \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{T}_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})\mathbf{n}(\mathbf{x}) dS.$$

Jsou-li výrazy v plošných integrálech diferencovátelné ve smyslu potřeb Greenovy formule (G2) dostaneme pohybový zákon ve složkovém tvaru (proměnné výjímečně nevypisujeme).

$$\int\limits_{\Omega_B}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\,(\rho v_i\mathbf{v})-F_i-div\,\mathbf{T}_i\right]d\mathbf{x}=0,\ \forall\,\Omega_B\subset\Omega. \tag{2.4.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_B}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j)\right]d\mathbf{x}=\int\limits_{\Omega_B}\left[F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ji}\right]d\mathbf{x}. \tag{2.4.7'}$$

Opakováním procesu limitování " $\mu(\Omega_B)\ \to\ \mathbf{x}$ " dostaneme *lokální* (diferenciální) *tvar pohybového zákona* v rozepsané podobě.

$$\frac{\partial\rho v_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_1v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_1v_3)=F_1+\frac{\partial\tau_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}, \tag{2.4.8}$$

$$\frac{\partial\rho v_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_2v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_2v_3)=F_2+\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial\rho v_3}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_3v_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_3v_2)+\frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3v_3)=F_3+\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{33}}{\partial x_3}.$$

1.4.5 Speciální zápisy pohybového zákona

Ve smyslu sčítací konvence se (2.4.8) píše ve tvaru

$$\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_iv_j)=F_i+\frac{\partial\tau_{ji}}{\partial x_j}, \tag{2.4.9}$$

nebo ve tvaru

$$\underbrace{\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}+div\,(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})}_{\rho\frac{dv_i}{dt}}=\mathbf{F}+div\,\mathcal{T}; \tag{2.4.9'}$$

nebo obráceně ve vektorově-tenzorovém tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v})+div\,(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{F}+div\,\mathcal{T}; \tag{2.4.10}$$

užité symboly definujeme takto:

$$\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}=\begin{bmatrix}v_1v_1 & v_1v_2 & v_1v_3\\ v_2v_1 & v_2v_2 & v_2v_3\\ v_3v_1 & v_3v_2 & v_3v_3\end{bmatrix};\quad \rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\rho v_1v_1 & \rho v_1v_2 & \rho v_1v_3\\ \rho v_2v_1 & \rho v_2v_2 & \rho v_2v_3\\ \rho v_3v_1 & \rho v_3v_2 & \rho v_3v_3\end{bmatrix}$$

a hovoříme o tenzorovém součinu vektorů (je to tenzor) a

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & \tau_{31} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{32} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

je tenzor napjatosti.

Poznámky: a) V neviskozní tekutině je

$$\mathcal{T} = -p\mathbf{I}$$

kde p je tlak a $\mathbf{I}$ je jednotková matice, tj.

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} -p & & \\ & -p & \\ & & -p \end{bmatrix}$$

Potom (2.4.9), resp. (2.4.10) se nazývá *Eulerův tvar* pohybového zákona („Eulerovy rovnice") a

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

b) ve viskozní tekutině je

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda div\, \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu D(\mathbf{v}),$$

kde

$$D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3} \quad - \text{ tenzor rychlosti deformace.}$$

Pak místo (2.4.10) píšeme

(2.4.11) $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + div\,(\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{F} - grad\, p + grad\,(\lambda div\, \mathbf{v}) + div\,(2\mu D(\mathbf{v}))$$

c) pro kontinum typu *nestlačitelné viskozní* kapaliny je $\rho = konst$, $\mu \neq 0$ (první viskozní koeficient) , $\lambda = 0$ (druhý viskozní koeficient) a máme z (2.4.10)

(2.4.12) $$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + div\,(\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{F}}{\rho} - \frac{1}{\rho} grad\, p + \frac{\mu}{\rho} div\, D(\mathbf{v}).$$

Ve složkách (sčítací konvence)

$$(2.4.13) \qquad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_i},\ f_i = \frac{F_i}{\rho},\ \nu = \frac{\mu}{\rho};$$

Ve vektorovém zápisu

$$(2.4.14) \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} grad)\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} grad\, \mathbf{p} + \nu\Delta\mathbf{v},\ \Delta\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\Delta v_1\\ \Delta v_2\\ \Delta v_3\end{bmatrix}$$

Hovoříme o *Navier-Stokesové tvaru pohybového zákona* („Nevier-Stokesova rovnice“)

d) Pro nestlačitelnou tekutinu (= kapalina) je $\rho = konst$ a bilance hmotnosti bez zdrojů dává $div\, \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ a z (2.4.9) dostaneme

$$(2.4.15) \qquad \rho\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} grad\, v_i\right] = F_i + div\, \tau_{,i}, \quad i = 1, 2, 3$$

tj.

$$(2.4.16) \qquad \rho \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = F_i + div\, \tau_{,i}, \quad i = 1, 2, 3$$

resp.

$$(2.4.17) \qquad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + div\, \mathcal{T}$$

představuje lokální tvar zákona pohybující se nestlačitelné kapaliny.

e) Pro nepohybující se kontinum ($\mathbf{v} = 0$), se pohybový zákon (2.4.9), (2.4.10) redukuje na *zákon silové rovnováhy*

$$F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

resp.

$$\mathbf{F} + div\, \mathcal{T} = 0$$

Toto už je přiklad bilančního zákona stacionárního typu, nebot' se zde neuvažují časové změny, a tedy $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{x})$ (prostorové rozložení sil a napětí.)

1.5 Obecná energetická bilance

V odst. 1.5.7 jsme uvedli model bilance hmotnosti v oblasti Ω. Bez uvažování produkce zdrojů (nejběžnější případ) se lokální tvar uvádí ve tvaru.

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + div\, \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = 0.$$

Odstavec 2.4 byl věnován obecnému pohybovému zákonu.
Nejčastější tvar je

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + div\,(\rho(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x},t)) = \rho(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t) + div\,\mathcal{T}(\mathbf{x},t).$$

V obecnějších situacích hustota ρ a tenzor napětí $\mathcal{T}$ závisí na teplotě a procesy probíhají s energetickými změnami. Potom při popisu takových procesů musíme naše úvahy doplnit o **bilance energie**.

Slovní formulace:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{časová změna energie}\\ \text{v bil. obl. } \Omega_B\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{tok enrgie}\\ \text{hranicí } \partial\Omega_B\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{práce vnějších}\\ \text{(objemových) sil}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{práce vnitřních}\\ \text{(plošných) sil}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{tok tepla}\\ \text{hranicí}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{produkce}\\ \text{zdrojů}\end{matrix}}$$

Lokální tvar:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + div\,(\mathbf{E}+\mathbf{p})\mathbf{v} = \rho\mathbf{f}\mathbf{v} + div\,\mathcal{T}\mathbf{v} + div\,\mathbf{w} + \mathbf{F} \tag{2.5.1}$$

$$\mathbf{E} = \rho\left(e + \frac{|\mathbf{v}^2|}{2}\right);\ e = e(\mathbf{x},t) \text{ měná vnitřní energie } ([e] = m^2 s^{-2});$$

$$[\rho e] = kgm^2 s^{-2} \qquad \text{(energie).}$$

Zde $\mathcal{T}$ - tenzor napjatosti,
$\mathbf{w}$ - vektor tepelného toku: obykle $\mathbf{w} = -\mathbf{p} grad\, T$, T - teplota,
$\mathbf{F}$ - hustota produkce nergetických zdrojů (nezávislých).