2 Modely elementárních dynamických procesů

2.1 Příklady dynamických procesů

2.1.1 Padající těleso bez odporu prostředí

Proces: Těleso (hmotný bod) konstantní hmotnosti m padající v gravitačním poli bez odporu prostředí (pohyb **ve směru gravitačního pole Země**).

Zákon (zákonitost): Newtonův pohybový zákon (rovnováha sil).

Slovní formulace:

- **Lokální**: Okamžitá změna hybnosti je v každém okamžiku t rovna působící síle (tíze tělesa).
- **Globální**: V každém časovém úseku $\langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$ je změna hybnosti úměrná změně času.

Matematické vyjádření:

$$\underbrace{m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{setrvačná síla}} = \underbrace{m\,g}_{\text{tíhová síla}}, \quad \underbrace{t \in \langle 0, T \rangle}_{\text{čas působení síly}}, \tag{2.1.1}$$

$v = v(t)$ je rychlost padajícího tělesa.

$$m[v(t_2) - v(t_1)] = m\,g[t_2 - t_1], \qquad \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle. \tag{2.1.2}$$

2.1.2 Padající těleso s odporem prostředí

Proces: Padající těleso konstantní hmotnosti m v gravitačním poli s odporem prostředí úměrném rychlosti padajícího tělesa.

Zákon (zákonitost): Newtonův pohybový zákon.

Slovní formulace:

- **Lokální**: Okamžitá změna hybnosti je v každém okamžiku t rovna působící síle (tíze tělesa zmenšené o brzdící sílu).
- **Globální**: V každém časovém úseku $\langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$ je změna hybnosti rovna změně síly na tomto úseku.

Matematické vyjádření:

$$m \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m\,g - k\,v(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle, \tag{2.1.3}$$

kde k je koeficient odporu prostředí.

$$m[v(t_2) - v(t_1)] = m\,g[t_2 - t_1] - k \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle. \tag{2.1.4}$$

2.1.3 Pohybující se těleso

Proces: Těleso proměnné hmotnosti $m = m(t)$ pohybující se ve směru působící síly $F(t)$ (tažné síly).

Zákon (zákonitost): Newtonův pohybový zákon.

Matematické vyjádření:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m(t)\,v(t)) = F(t), \quad t \in \langle 0, T \rangle.$$

nebo

$$m(t_2)v(t_2) - m(t_1)v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle.$$

Zobecnění: silové pole je dáno vektorovou funkcí $\mathbf{F}(t)$, hybnost $\mathbf{p}(t) = m(t)v(t)$ je také vektorová funkce.

- Globální tvar zákona hybnosti: hybnost v okamžiku t_2 je rovna hybnosti v okamžiku t_1 zvětšená o impuls síly $\mathbf{F}(t)$ na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Matematické vyjádření:

$$\mathbf{p}(t_2) = \mathbf{p}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle. \tag{2.1.5}$$

- Lokální tvar zákona (je důsledkem spojitosti funkce $F(t)$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}(t) \qquad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \tag{2.1.6}$$

Jednotky a rozměr:

$[\mathbf{F}]$ =N= $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $\qquad [\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t]$ =N·s = $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

$[\mathbf{p}]$ =N·s = $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, $\qquad [\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}]$ =N.

2.1.4 Elektrický proud v LR - obvodu

Proces: Elektrický proud ("elektrické proudění") v tzv. **LR-obvodu** vyvolaný zdrojem časově proměnného napětí (obr. 17).

Zákon (zákonitost): Kirchhoffův zákon napěťové bilance.

Slovní formulace: Součet napětí v každém časovém okamžiku t na jednotlivých částech obvodu je roven napětí na svorkách zdroje.

Matematické vyjádření:

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R\,i(t) = u(t), \quad t \in \langle 0, T\rangle, \tag{2.1.7}$$

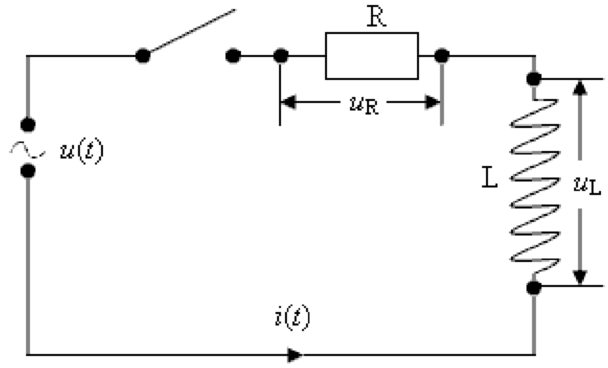
kde $i(t)$ je elektrický proud; $i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$, $q(t) = \int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $=q(t)$ je hustota náboje v okamžiku t (množství náboje proteklého vodičem za jednotku času).

Jednotky a rozměr:

$[i] = \mathrm{A}$, $[R] = \Omega = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}$,

$[q] = \mathrm{C} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$, $[L] = \mathrm{V}\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{s}$,

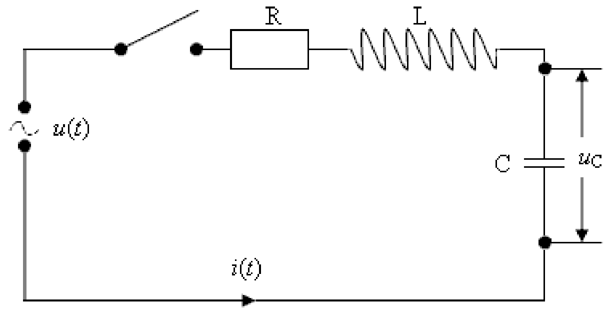
$[u]$ =V= $\mathrm{J}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ =N·m $\cdot\,\mathrm{C}^{-1}$.



Obr. 17.

2.1.5 Elektrický proud v LRC - obvodu

Proces: Elektrický proud v tzv. **LRC-obvodu** vyvolaný zdrojem napětí $u(t)$ (obr. 18).



Obr. 18.

Zákon (zákonitost): Kirchhoffův zákon napěťové bilance.

Matematické vyjádření:

$$(2.1.8)\qquad L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + R\,i(t) + \underbrace{\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\frac{q(t)}{C}} = u(t), \quad t \in \langle 0, T\rangle.$$

2.1.6 Populační dynamika

Populací rozumíme skupinu živých organismů jednoho biologického druhu. Více populací různých druhů se nazývá *biologické společenství.*

První model vývoje počtu jedinců v populaci jednoho druhu vytvořil anglický ekonom Malthus (1766-1834) a tento model se nazývá *Malthusův populační zákon.*

Malthusův model předpokládá exponenciální růst populace. To není realistické. Již od 19. století se populační modely zpřesňovaly (např. Verhulst, 1845).

Proces: Vývoj (růst) množství biologických jedinců jednoho druhu v nějaké oblasti.

Zákon (zákonitost): Populační zákon růstu pro **jednu populaci** s určitým typem rozmnožování.

Slovní formulace: Okamžitý přírůstek (úbytek) populace závisí na počtu jedinců (párů schopných rozmnožování) a na migraci.

Matematické vyjádření:

$$(2.1.9)\qquad \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a\,N + M(t), \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

kde a je konstantní populační koeficient, hustota populace $N(t)$ označuje průměrnou střední koncentraci populace v uvažovaném prostoru v okamžiku t, $M(t)$ je migrační funkce.

Obecné bilanční **předpoklady** o změnách hustoty populace se nazývají *zákony populační dynamiky*.

Předpokládáme-li také prostorové rozložení populace, potom označujeme $N(\mathbf{x}, t)$ počet populačních jedinců v jednotce objemu v okamžiku t „ kolem bodu $\mathbf{x}$ v okamžiku t“.

Integrál

$$N(\Omega_B, t) = N(t) = \int\limits_{\Omega_B} N(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

označuje počet jedinců v oblasti v okamžiku t.

Budeme předpokládat standardní složení populace z hlediska rozmnožování a naopak nebudeme do úvah zahrnovat zpožďovací efekty (těhotenství, dospívání, larvální stadium). Na základě pozorování se domníváme, že změna hustoty populace v každém časovém úseku $\langle t_1, t_2 \rangle$ je rovna celkovému přírůstku (úbytku) hustoty populace na tomto úseku. Tento přírůstek lze vyjádřit integrálem

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} [M(t) + rN(t)]\,\mathrm{d}t,$$

v němž $\int\limits_{t_1}^{t_2} M(t)\,\mathrm{d}t$ je celková migrace v $\langle t_1, t_2 \rangle$ (M je tzv. migrační hustota) a $\int\limits_{t_1}^{t_2} rN(t)\,\mathrm{d}t$ je změna vyvolaná zrozením a úmrtím. Koeficient $r > 0$ závisí obecně na N, tj. $r = r(N(t))$ a určuje tzv. *relativní vitalitu* populace (porodnost minus úmrtnost) a je definován poměrem $\frac{\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}}{N}$. Globální tvar zákona pak zapíšeme ve tvaru

$$N(t_2) - N(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} [M(t) + rN(t)]\,\mathrm{d}t,\ \forall \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle. \tag{2.1.10}$$

Je-li $M + rN$ spojitá funkce, pak limitním důsledkem (2.1.10) pro $t_1 \to t$, $t_2 \to t$, je *lokální tvar populačního zákona*

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = rN(t) + M(t), \tag{2.1.11}$$

platného v každém okamžiku $t \in (0, T)$ vyšetřovaného období $\langle 0, T \rangle$.

Rozdíl (2.1.11) od (2.1.9) spočívá v tom, že $r = r(N(t))$ je obecně funkce hustoty N. Zmíněný Verhulst předpokládal, že r je lineární klesající funkcí proměnné

N a navrhl populační koeficient ve tvaru

$$r(N) = a\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{2.1.12}$$

kde $a > 0, K > 0$. Pro $K \to +\infty$ přechází Verhulstův model v Malthusův model. Koeficient K má tedy význam kapacity prostředí, charakterizující „přívětivost“ prostředí pro rozmnožování, koeficient a má význam koeficientu porodnosti.

V naší terminologii Malthus předpokládal, že populační koeficient r je roven kladnému číslu a neuvažoval migraci, tj.

$$M(t) = 0.$$

Dynamika populace je pak popsána funkcí $N = N(t)$, která je řešením počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = aN,\ N(t_0) = N_0,\ t \geq t_0. \tag{2.1.13}$$

Takže

$$N(t) = N_0 e^{a(t-t_0)}$$

a znamená to, že za uvedených předpokladů (tj. relativní časová změna hustoty N je přímo úměrná hustotě N) populace roste ($N_0 > 0$) exponenciálně. Nesprávně se říká, že populace roste „geometrickou řadou“. Předpoklad konstantnosti populačního koeficientu však také znamená, že neexistují omezující či regulační faktory porodnosti. Protože bylo třeba uvažovat regulační mechanizmy (zpětná vazba) a to vnitřní (adaptace organismu) či vnější (omezenost zdrojů potravy, kapacita prostředí), bylo rozumné hledat věrohodnější tvar koeficientu $r = r(N)$, než navrhl Verhulst.

Dynamika populace je podle Verhulstova modelu popsána takovou funkcí $N = N(t)$, která je řešením počáteční úlohy

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = a(1 - \frac{N}{K})N + M(t),\ N(t_0) = N_0,\ t \geq 0. \tag{2.1.14}$$

Elementárními metodami lze stanovit řešení této počáteční úlohy (klademe $t_0 = 0$, $M(t) \equiv 0$) ve tvaru

$$N(t) = \frac{KN_0e^{at}}{N_0e^{at} + K - N_0},\ t \geq 0.$$

Doporučujeme vyšetřit průběh funkce $N = N(t)$ pro různé hodnoty K, N_0, a.

Modely interagujících populací

Jestliže Malthusův model pro jednu populaci adaptujeme na situaci **dvou populací** s hustotami $N(t), M(t)$, lze lokální podobu příslušného zákona psát Malthusova typu ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{\mathrm{d}t} &= aM(t) + bN(t)M(t) \\ \frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} &= cN(t) + \mathrm{d}N(t)M(t), \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

kde a, b, c, d jsou konstanty, jejichž znaménka určují charakter vztahu obou populací:
Model lovec-kořist: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$, $d > 0$, N... lovec; M...kořist.
Model soutěžení: $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d < 0$;
Model symbiozy: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$.
Součinový člen $N(t)M(t)$ odráží např. vliv počtu střetů obou populací (aktů lovu) na dynamiku každé populace. Doporučujeme čtenáři vyšetřit průběhy funkcí $N = N(t)$, $M = M(t)$ a především křivky ve fázové rovině určenou parametricky uvedenými funkcemi.
Každý model odráží popisovanou skutečnost v závislosti na vyslovených (a často i nevyslovených) předpokladech.

Verhulstova varianta modelu (2.1.15) má tvar

$$\begin{aligned} \frac{dM}{\mathrm{d}t} &= M\left[a\left(1 - \frac{M}{K}\right) - \frac{bN}{N+c}\right], \\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= N\left[d\left(1 - \frac{hN}{M}\right)\right], \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

kde a, K, b, c, d, h jsou kladné konstanty.

2.1.7 Produkční proces (obchodní bilance)

Proces: Obchodní bilance (produkční (logistická) bilance)

Zákon (zákonitost): Zákon růstu produkce (spotřeby).

Slovní formulace: Lokální (časová) změna produkce je „úměrná“ celkové produkci.

Matematické vyjádření:

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = r(t)\,p(t), \quad t \in \langle 0, T\rangle,$$

kde $r(t) > 0$ je produkční koeficient, $p(t)$ je produkční funkce.

Zobecnění: $r = r(p(t))$.

2.1.8 Ochlazování (ohřev) tělesa

Těleso v prostředí o teplotě R má v okamžiku t_0 teplotu $T(t_0)$. Pro $t > t_0$ se teplota tělesa mění v závislosti na okolní teplotě, tj. teploty se vyrovnávají.

Proces: Ochlazování (ohřev) tělesa.

Zákon (zákonitost): Newtonův zákon ochlazování. Speciální případ energetické bilance (tepelné bilance).

Slovní formulace: Okamžitá časová změna teploty je „úměrná“ rozdílu teploty vně a uvnitř tělesa.

Matematické vyjádření:

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - R), \quad t \in \langle 0, T \rangle,$$

$$T(t_0) = T_0,$$

kde $T(t)$ je teplota tělesa v čase t, $k > 0$ je daný teplotní koeficient charakterizující tepelné vlastnosti tělesa a okolí, R je teplota okolí, T_0 je počáteční teplota.

Poznámka: Nelze-li předpokládat, že teplota tělesa je v každém místě stejná, musíme definovat

$$T(t) = \int_{\Omega_B} T(\mathbf{x}, t)\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

kde funkce $T(\mathbf{x}, t)$ určuje rozložení teploty v čase i prostoru $\mathbf{x} \in \Omega_B$ a interpretuje ji jako teplotu v místě $\mathbf{x}$ a v okamžiku t.

2.1.9 Chemická reakce - doplnit

2.2 Úlohy a metody řešení

2.2.1 Dynamické zákony a diferenciální rovnosti

Z uvedených příkladů jsme viděli, že dynamický zákon má obvykle tvar **rovnosti**, v níž se vyskytuje stavová funkce a její derivace.

Zákony a zákonitosti studujeme především proto, abychom mohli **předpovědět** časový vývoj procesu, tj. **určit** stav systému v nějakém budoucím čase, známe-li stav na počátku.

Musíme proto formulovat **úlohu** typu:
Najdi stavovou funkci $y = y(t)$, $t \in \langle 0, T \rangle$, která splňuje daný zákon tvaru diferenciální rovnosti.

Potom tuto úlohu nazýváme **diferenciální rovnice** (tj. funkcionální rovnice s derivacemi neznámé stavové funkce). O diferenciální rovnici hovoříme tehdy, vystupuje-li neznámá funkce v derivaci.

Příklad: Chceme stanovit rychlost $v = v(t)$ padajícího tělesa bez odporu prostředí z 2.1.1.
Požadavek zákona

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = m\,g,$$

se stává diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g, \quad (g \text{ je daná (známá) konstanta}),$$

pro neznámou funkci $v = v(t)$. Tuto funkci lze vypočítat přímým integrováním rovnosti $\dot{v}(t) = g$ přes interval $\langle t_0, t\rangle$,

$$\int_{t_0}^{t} \dot{v}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} g\,\mathrm{d}\tau.$$

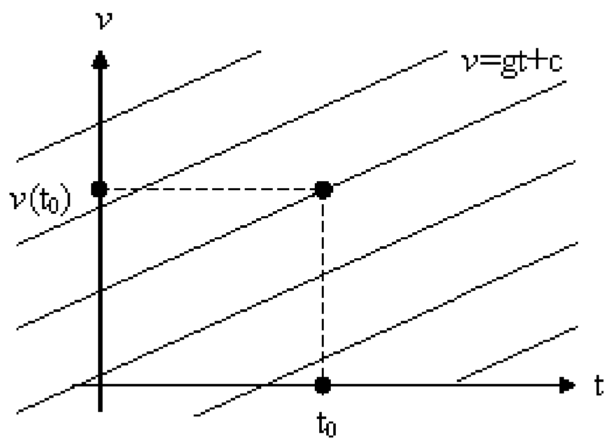
Obdržíme

$$v(t) - v(t_0) = g(t - t_0).$$

Výsledek zapíšeme ve tvaru

$$v(t) = gt + C, \quad C = v(t_0) - g\,t_0.$$

Interpretace výsledku: Pokud čísla t_0, $v(t_0)$ nejsou dána (známa), pak řešením



Obr. 19.

dané diferenciální rovnice je systém lineárních funkcí (viz obr. 19). Pokud $v(t_0)$ je dáno číslem v_0, tj. v čase t_0 požadujeme splnění podmínky

$$v(t_0) = v_0,$$

která znamená, že v okamžiku t_0 začne těleso padat s (udělenou) počáteční rychlostí v_0. Potom rychlost pro $t > t_0$ roste s časem podle funkce

$$v(t) = v_0 + g(t - t_0), \quad g > 0.$$

2.2.2 Úlohy pro diferenciální rovnice 1. řádu

Je dán výraz $f(t, y, u)$ a čísla $y_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$.

Úloha najít funkci $y = y(t)$, která splňuje

(a) rovnost

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t), u(t)), \quad \forall t \in I, \tag{2.2.1}$$

(b) počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.2.2}$$

se nazývá ***počáteční úloha*** a funkce $y = y(t)$ se pak nazývá ***řešení počáteční úlohy***.

Poznámka Formulace jakékoliv úlohy spočívá v tom, že si ujasňujeme, co je dáno a co se hledá.

Formulujme například tuto jednoduchou ***úlohu řízení***:

Je dána funkce $f(t)$ $t \in \langle 0, T\rangle$, dynamický zákon a koncový stav $y(T)$. **Určit funkci řízení** $u = u(t)$ a **počáteční stav** y_0 tak, aby platilo

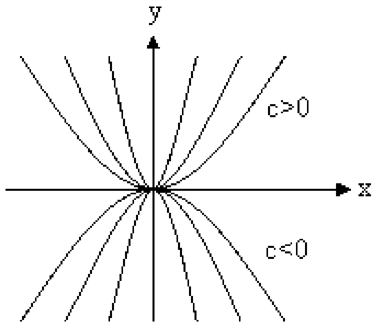
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t), u(t)), \quad \forall t \in \langle 0, T\rangle, \tag{2.2.3}$$

$$y(0) = y_0.$$

Znamená to, že chceme určit takové řízení a takový počáteční stav, ze kterého je dynamický systém převeden do daného cíle. Tyto úlohy jsou ovšem složitější, než úlohy počáteční.

2.2.3 Metody - příklady

(1) $\dot{y} = 2\frac{y}{t}, \quad t \neq 0.$



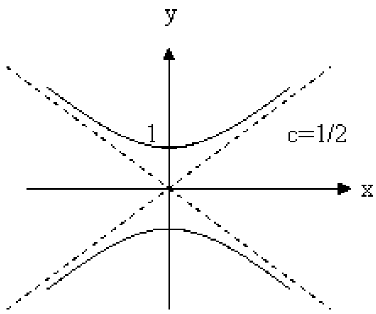
Separace:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ \ln|y| &= 2\ln|t| + \ln C \\ \ln|y| &= \ln Ct^2 \end{aligned}$$

Obecné řešení: $y(t) = Ct^2$ (systém parabol)

Otázka: Kam zmizely absolutní hodnoty?

(2) $y' = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0; \quad y(x) = ?$

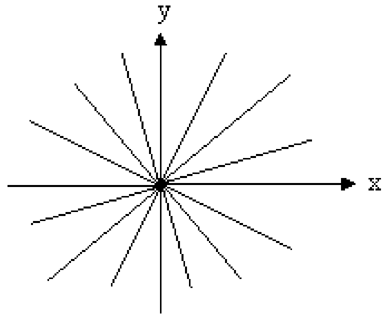


Separace:

$$\begin{aligned} y\,\mathrm{d}y &= x\,\mathrm{d}x \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + C \\ y^2 - x^2 &= 2C \end{aligned}$$

Na tento výsledek se díváme jako na **rovnici** (o dvou neznámých), jejímž řešením je funkce $y = y(x)$. Nebo hovoříme o rovnici křivky v rovině (hyperboly) a jejím řešením je křivka (hyperbola).
Z hlediska dané diferenciální rovnice se uvedená rovnice nazývá *obecný integrál.*

(3) $y' = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0; \quad y(x) = ?$



Separace:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{y} &= \tfrac{dx}{x} \\ \ln|y| &= 2\ln|x| + \ln C \\ y(x) &= Cx \end{aligned}$$

(4) $\dot{y} = 3y, \quad y(t_0) = y_0.$

Separace:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= 3\,dt \\ \ln|y| &= 3t + \ln C \quad \longrightarrow \quad \ln|y| = \ln e^{3t} + \ln C. \end{aligned}$$

Obecné řešení: $y(t) = Ce^{3t}; \quad \longrightarrow \; y(t_0) = Ce^{3t_0} \; \longrightarrow \; C = y_0 e^{-3t_0}.$

Řešení poč. úlohy: $y(t) = y_0 e^{3(t-t_0)}.$

(5) $\dot{y} = ty, \quad y(t_0) = y_0.$

Separace:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= t\,dt \\ \ln|y| &= \frac{t^2}{2} + \ln C. \end{aligned}$$

Obecné řešení: $y(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}; \quad \longrightarrow \; y(t_0) = Ce^{\frac{t_0^2}{2}}.$

Řešení poč. úlohy: $y(t) = y_0 e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}}.$

(6) $(1+e^t)y\dot{y} = e^t \quad \longleftrightarrow \quad \dot{y} = \frac{e^t}{(1+e^t)} \cdot \frac{1}{y}.$

Separace:

$$\begin{aligned} y\,dy &= \frac{e^t}{1+e^t}\,dt \\ \frac{y^2}{2} &= ln(1+e^t) + C \ldots \text{ obecný integrál} \end{aligned}$$

Obecné řešení:

$$y(t) = \begin{cases} \sqrt{2\ln(1+e^t) + 2C}, \\ -\sqrt{2\ln(1+e^t) + 2C}. \end{cases}$$

2.3 Další úlohy

2.3.1 Demografická úloha

Nepolepšitelní zločinci mužského pohlaví byli v pravidelném množství $M > 0$ (M je množství jedinců za jednotku času) vystěhováváni v časovém období $\langle 0, t_1\rangle$ na pustý ostrov s dostatkem potravy. V čase $t_1 > 0$ odsun ustal
a od tohoto okamžiku obyvatelé ostrova začali vymírat stářím s konstantním koeficientem úmrtnosti $a < 0$, $a = -0.01$. Na počátku osídlování žilo již na ostrově N_0 zločinců.

Chceme určit časovou závislost $N = N(t)$ množství obyvatel ostrova.
Řešení: Populační zákon vezmeme ve tvaru (odst. 8.1.1. F)

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, N, M), \quad t \geq 0,$$

kde

$$f(t, N, M) = \begin{cases} M, \ t \in \langle 0, t_1\rangle, \ M \text{ je konstanta}, \\ aN(t), \ t \geq t_1. \end{cases}$$

Počáteční stav je určen počáteční podmínkou

$$N(0) = N_0.$$

Metodami z předchozích odstavců vypočteme

$$N(t) = \begin{cases} Mt + C_1, \ t \in \langle 0, t_1\rangle; \ \text{metoda přímé integrace;} \\ C_2\, e^{at}, \ t \geq t_1; \ \text{metoda separace.} \end{cases}$$

Z počáteční podmínky obdržíme $N_0 = C_1$,
z podmínky spojitosti funkce $N(t)$ v bodě t_1

$$N(t_1-) = N(t_1+)$$

máme

$$Mt_1 + C_1 = C_2 e^{at_1},$$

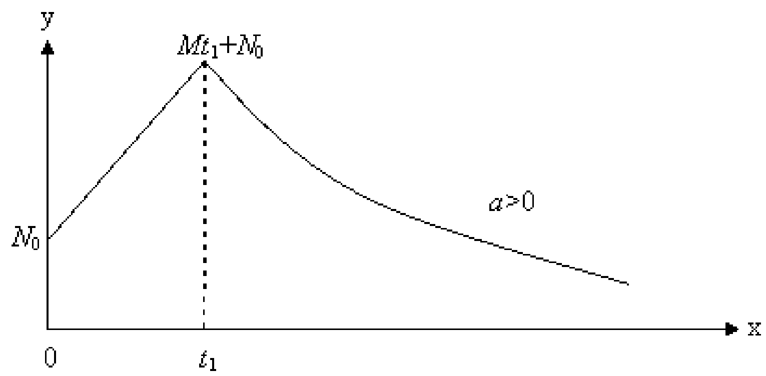
tj.

$$C_2 = (Mt_1 + C_1)e^{-at_1}.$$

Výsledek:

$$N(t) = \begin{cases} Mt + N_0, \ t \in \langle 0, t_1\rangle, \\ (Mt_1 + N_0)e^{a(t-t_1)}, \ t \geq t_1. \end{cases}$$

Graf:



Obr. 20.

2.3.2 Úloha detektivní - aneb, kdy se stala vražda

V čase $t = 0$ bylo nalezeno tělo zavražděného s tělesnou teplotou $T(0) = 15^o$ C. Bylo prověřeno, že vrah se zavražděným nemanipuloval. V místnosti vraždy byla konstantní teplota $R = 5^o$ C.

Je třeba zjistit, kdy se stala vražda.
Řešení: Proces ochlazování tělesa se řídí zákonem (odst. 8.1.1. H)

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - R); \quad t \geq 0.$$

Počáteční teplota je dána hodnotou

$$T(0) = 15.$$

Metodou integračního faktoru stanovíme funkci chladnutí

$$T(t) = 5 + 10 \cdot e^{-kt}.$$

Detektiv však nezná koeficient chladnutí $k > 0$. Umí si však poradit (zřejmě absolvoval KMA). Zjistil si, že za 2 hodiny je teplota mrtvoly $T(2) = 8^o$ C. Vypočte k z rovnice

$$8 = 5 + 10 \cdot e^{-k2} \longrightarrow k = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{10} \doteq 0,602.$$

Takže

$$T(t) = 5 + \cdot e^{-0,602t}.$$

Zajímá nás nyní čas t_2, kdy byla teplota $T(t_2) = 37^o\,\mathrm{C}$ (zavražděný neměl horečku).

Z rovnice

$$37 = 5 + 10 \cdot e^{-0{,}602 t_2}$$

vypočteme

$$t_2 = -\frac{1}{6{,}02} \ln \frac{32}{10} \doteq -1{,}932.$$

Vražda se stala si před hodinou a 56 minutami.

2.3.3 Pohyb rakety v gravitačním poli bez odporu prostředí

Raketa o počáteční hmotnosti $M_0 = m_0 + m_1$ (kg) startuje v čase $t = 0$ s počáteční rychlostí $v_0 = 0$ z povrchu Země kolmo k zemskému povrchu. Okamžitá hmotnost $M(t) = m_1 + m(t)$ je dána hmotností paliva $m(t)$ a hmotností konstrukce m_1. Hmotnost paliva ubývá s časem podle závislosti

$$m(t) = m_0 - rt,$$

kde m_0 je počáteční hmotnost paliva a daná konstanta r (kg/s) určuje úbytek paliva za jednotku času. Je-li F konstantní tažná síla motoru (proti směru konstantního gravitačního pole), potom pohyb rakety po přímé dráze se řídí ***pohybovým zákonem***

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(M(t)v(t)\big) = F - M(t)g.$$

Stavovou (neznámou) funkcí je zde rychlost $v = v(t)$.

Chceme-li stanovit stav (rychlost) rakety pro $t > 0$, musíme řešit počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[(m_1 + m_0 - rt)v\big] = F - (m_1 + m_0 - rt)g, \quad t > 0,$$

$$v(0) = v_0 \quad (= 0).$$

První počáteční úlohu řešíme metodou přímé integrace.
Výsledek základní úlohy (metoda přímé integrace):

$$v(t) = \frac{Ft}{m_1 + m_0 - rt} - \frac{g}{m_1 + m_0 - rt}\left[(m_1 + m_0)t - \frac{rt^2}{2}\right], \quad t \geq 0.$$

Chceme-li stanovit dráhu rakety $s = s(t)$ (vzdálenost od místa startu) vyjdeme ze **zákona dráhy**

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t), \quad t > 0,$$

s požadavkem

$$s(0) = 0.$$

Opět uplatníme metodu přímé integrace.

Nyní můžeme formulovat **další úlohy**.

a) V jakém okamžiku t_1 dohoří palivo?

b) V jaké vzdálenosti $s(t_1)$ od Země dohoří palivo? $s(0) = 0$.

c) Jak určit pohyb rakety i po vyhoření paliva?

d) Formulovat úlohu pohybu rakety v proměnném gravitačním poli, jestliže intenzita gravitačního pole g je funkcí vzdálenosti od startu

$$g = g(s) = \begin{cases} g_0 > 0 \text{ (konstantou)}, & s \leq s_1, \\ \frac{g_0}{s_2 - s_1}(s_2 - s), & s_1 < s \leq s_2, \\ 0, & s > s_2 \end{cases}$$

ad a) V okamžiku $t_1 > 0$ bude $m(t_1) = 0$, tj.

$$m_0 - rt_1 = 0,$$

tj. v čase $t_1 = \frac{m_0}{r}$ palivo vyhoří.

ad b) Jak bylo zmíněno, řešíme počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v(t),$$

$$s(0) = 0.$$

Zde $v(t)$ je dáno výsledkem základní úlohy.

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Takže palivo dohoří ve vzdálenosti

$$s(t_1) = \int_0^{t_1} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

ad c) Po vyhoření paliva je pohyb rakety popsán počáteční úlohou, tj. od okamžiku t_1 se raketa s konstantní hmotností pohybuje setrvačností bez tažné síly:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\, v(t)) = -m_1\, g, \quad t \geq t_1,$$

$$v(t_1) = v_1 \text{ (vypočteno ze základní úlohy).}$$

Odtud

$$v(t) = v_1 - g(t - t_1), \quad t \geq t_1.$$

V okamžiku $t_2 = t_1 + \frac{v_1}{g}$ se raketa zastaví ($v(t_2) = 0$) a začne padat na Zem volným pádem.

ad d) Úlohu formulujeme na základě zákona

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M(t)v(t)\right) = F - M(t)g(s), \quad t \geq 0,$$

kde $M(t)$, F je stejné jako v základní úloze. Funkce $g(s)$ je uvedena v zadání. Do okamžiku t_1 (a do vzdálenosti $s(t_1)$) se raketa pohybuje podle tvaru zákona pohybu uvedeného v úvodu odstavce (tj. s konstantním g). Cílem úlohy z bodu d) je určit pohyb rakety (tj. $v(t)$, $s(t)$) i v beztížném stavu.

Poznámka. Uvažte alternativně situace, v nichž palivo vyhoří ještě v gravitačním poli a naopak i situaci v níž palivo hoří ještě v beztížném stavu. Projeví se ještě tah motoru?

2.3.4 Úloha tělesa padajícího (pohybujícího se) v gravitačním poli Země s odporem prostředí

Zadání: Těleso o konstantní hmotnosti $m > 0$ se v gravitačním poli (gravitační konstanta g) pohybuje ve směru gravitačního pole v atmosféře s konstantním koeficientem odporu prostředí $k > 0$. Je-li $v(t)$ rychlost pohybu v okamžiku t, pak $kv(t)$ je síla odporu vzduchu (ve směru proti gravitační síle).
Těleso začalo padat s rychlostí v_0.

a) Chceme stanovit okamžitou rychlost $v = v(t)$ padajícího tělesa, rychlost dopadu a dobu dopadu, známe-li výšku $h_0 = h(t_0)$.

b) Chceme stanovit výšku $h_1 = h(\bar{t})$, ze které je třeba skočit, aby rychlost dopadu byla v_1.

c) Chceme vyšetřit závislost $v = \varphi(k)$ a určit $\lim\limits_{k \to 0} \varphi(k)$.

ad a) Musíme tedy nejdříve řešit úlohu

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv, \quad t \geq t_0,$$

$$v(t_0) = v_0.$$

Metoda integračního faktoru pro rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{kv}{m} = g: \quad (\dot{v} + \frac{k}{m}\,v = g).$$

Určíme funkci $w = w(t)$, aby $\quad w \cdot \dot{v} + \frac{k}{m}\,w \cdot v = gw, \quad \dot{v} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t};$

$$\dot{w} = \frac{k}{m}\,w \to w(t) = e^{\frac{k}{m}\,t}.$$

Takže řešíme upravenou rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\frac{k}{m}\,t}v) = g \cdot e^{\frac{k}{m}\,t}.$$

Přímou integrací a dosazením počáteční podmínky dostaneme

$$v(t) = \frac{m}{k}\,g + (v_0 - \frac{m}{k}\,g)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}.$$

Dráhu $s = s(t)$ určíme podle zákona dráhy

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t), \quad t \geq t_0,$$

$$s(t_0) = h.$$

Přímou integrací dostaneme

$$s(t) = h_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{m}{k}\,g + \left(v_0 - \frac{m}{k}\,g\right) e^{-\frac{k}{m}(\tau-t_0)}\right] \mathrm{d}\tau =$$

$$= h_0 + \left[1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right] \left[\frac{m}{k}\,v_0 - \frac{m^2}{k^2}\,g\right].$$

Dobu dopadu t_1 určíme z podmínky

$$s(t_1) = 0.$$

Řešíme tedy nelineární algebraickou rovnici pro neznámou t_1:
Dostaneme

$$h_0 + \left[1 - e^{-\frac{k}{m}(t_1-t_0)}\right] \left[\frac{m}{k}\,v_0 - \frac{m^2}{k^2}\,g\right] = 0.$$

Vypočteme

$$t_1 = \ldots.$$

ad b) Stanovíme čas $\bar{t}$, v němž je splněna podmínka

$$v(\bar{t}) = v_1 \quad \text{(zadaná rychlost dopadu)}.$$

Řešením úlohy

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t), \quad t \geq t_0,$$
$$s(t_0) = h + \Delta s,$$

dostaneme

$$s(t) = h + \Delta s + \left[1 - e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}\right] \left[\frac{m}{k}\, v_0 - \frac{m^2}{k^2}\, g\right].$$

Z rovnice

$$s(t_2) = 0 \quad \text{(pro neznámou } \Delta s \text{)},$$

určíme hledanou výšku.

ad c) Hledaná závislost

$$v = \varphi(k) = \frac{m}{k}\, g + \left(v_0 - \frac{m}{k}\, g\right) e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)};$$

je to závislost typu

$$\varphi(z) = (1 - e^{-z})\frac{1}{z} + e^{-z}.$$

Stanovíme

$$\lim_{k \to 0} v = v_0 + g(t - t_0).$$

Rychlost padajícího tělesa bez odporu prostředí.

2.3.5 Úloha detektivní - podezřelý měl alibi [kontrola modelu!]

Navážeme na úlohu z odst.2.3.2. Řešili jsme počáteční úlohu

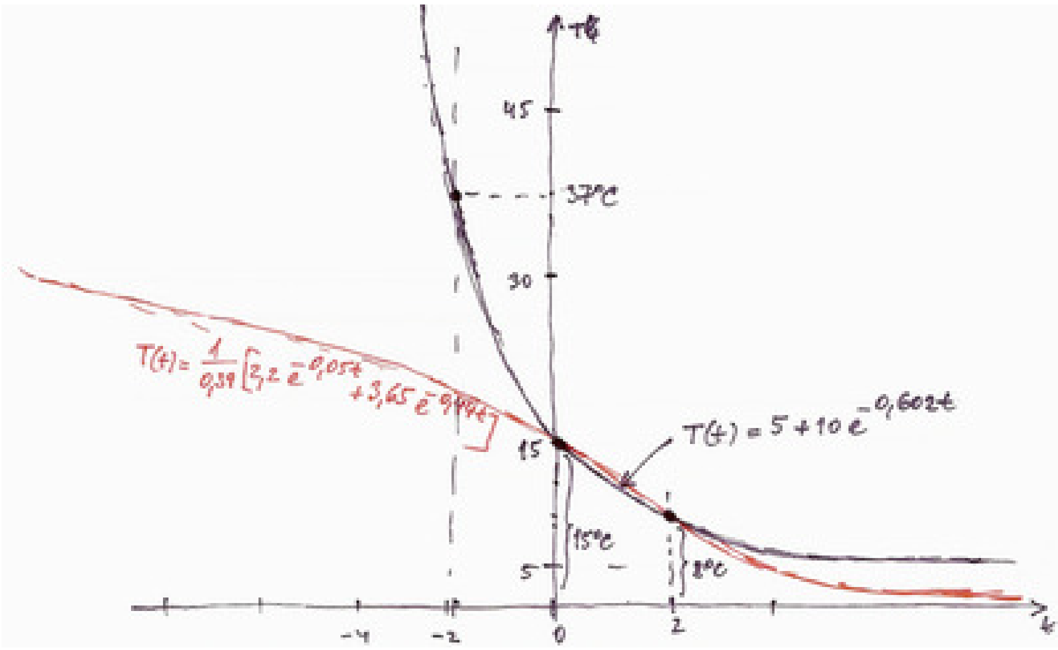
$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - R), \quad T(0) = 15; \quad t \geq 0$$

a pro $R = 5$, $k = 0,602$ jsme dostali funkci

$$T(t) = 5 + 10 \cdot e^{-0{,}602t},$$

která popisuje časový průběh teploty chladnoucího tělesa (viz obr. 21). Detektiv v úloze z těchto údajů usoudil, že těleso (zavražděný) mělo teplotu 37^o C zhruba před 2 hodinami od okamžiku nalezení ($t = 0$).

Nastala však komplikace ve vyšetřování. Byl určen jediný podezřelý, na určenou dobu vraždy však měl neotřesitelné alibi. Bylo nutné prověřit správnost doby vraždy. Detektiv proto musel **zpřesnit model**, tj. zpřesnit předpoklady.



Obr. 21.

a) Podrobnější analýzou nahradil předpoklad konstantnosti okolní teploty $R = 5$ předpokladem, že teplota R s časem klesala podle funkce

$$R(t) = 5e^{-0.05t}.$$

b) Teplotní koeficient $k > 0$ je třeba také zpřesnit podle nového modelu.

Řešíme nyní počáteční úlohu

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - 5e^{-0.05t}), \quad T(0) = 15, \quad t \geq 0.$$

Metodou integračního faktoru vypočteme

$$T(t) = \frac{1}{k - 0,05}\left[5ke^{-0,05t} + (10k - 0,75)e^{-kt}\right].$$

Z požadavku $T(2) = 8$ se vypočte (řeší se nelineární rovnice pro neznámou k některou numerickou metodou)

$$k \approx 0,44.$$

Finální podoba hledané funkce je

$$T(t) = \frac{1}{0,39}\left[2,2e^{-0,05t} + 3,65e^{-0,44t}\right].$$

Její graf je (červeně) uveden (označen) opět na obr. 21.

2.3.6 Úloha houpačky v gravitačním poli

Na pevném závěsu konstantní délky l je připevněno těleso konstantní hmotnosti m. Působí na něj pouze síla gravitačního pole Země. Odpor prostředí nepředpokládáme. Hmotnost závěsu bereme nulovou.

Délkovou výchylku (délku opisovaného oblouku kružnice) označíme $s = s(t)$, rychlost pohybu tělesa definujeme vztahem (zákon rychlosti)

$$v = v(t) = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}, \qquad t \geq t_0.$$

Za uvedených předpokladů usoudíme, že bude postačující uvažovat **fyzikální model** houpačky, a to tzv. *matematické kyvadlo*.

Pohyb houpačky se řídí opět Newtonovým zákonem (viz odst. 2.1.3)

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = F(t), \quad t \geq t_0,$$

kde $F(t) = -mg\sin\alpha(t)$; $\alpha(t)$ je úhlová výchylka závěsu od klidové (svislé) polohy.

Formulujeme základní *počáteční úlohu*: Chceme stanovit funkce $s = s(t)$, $v = v(t)$, $t \geq t_0$ splňující relevantní pohybový zákon a zákon rychlosti, když je dán počáteční stav podmínkami

$$v(t_0) = v_0, \qquad s(t_0) = s_0, \qquad \alpha(t_0) = \alpha_0.$$

Máme tedy tyto podmínky

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\alpha(t), \quad \alpha(t) = \frac{s(t)}{l}, \; t \in (t_0, +\infty),$$

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = v(t),$$

$$v(t_0) = v_0, \qquad s(t_0) = s_0.$$

V dalším volíme $v_0 = 0$ (nulová počáteční rychlost). V počáteční úloze máme soustavu dvou diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $s = s(t)$, $v = v(t)$ a příslušné počáteční podmínky určující **počáteční stav** systému.

Teoretické výsledky (viz.např. KMA/ODR) opravňují ke konstatování, že daná úloha má jediné řešení (korektní úloha!) a funkce $s = s(t)$ je současně řešením počáteční úlohy pro rovnici 2. řádu

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g\sin\frac{s}{l}, \quad t \in (t_0, +\infty)$$

s počátečními podmínkami

$$s(t_0) = s_0, \qquad \frac{\mathrm{d}s(t_0)}{\mathrm{d}t} = v_0 = 0.$$

Diferenciální rovnice není lineární. Abychom ke stanovení řešení mohli užít elementární metody, využijeme vtipného obratu založeného na inverzní funkci a derivaci složené funkce:

$$v = v(t);\ s = s(t)\ \rightarrow\ t = t(s)\ \Rightarrow\ v = v(t(s)) = v(s);$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}.$$

Máme tedy nelineární rovnici (1.řádu) pro neznámou funkci $v = v(s)$

$$(*) \qquad v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g\sin\frac{s}{l},$$

a počáteční (koncovou) podmínku

$$v_0 = v(t_0) = v(t(s_0)) = v(s_0) = 0.$$

Integrujeme (*) přes interval $\langle s_0, s\rangle$ podle s, tj. přes interval $\langle v_0, v\rangle$ podle v, tj.

$$\int_{v_0}^{v} w\,\mathrm{d}w = -g\int_{s_0}^{s}\sin\frac{\sigma}{l}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Takže

$$\frac{v^2}{2} = gl[\cos\frac{s}{l} - \cos\frac{s_0}{l}] = 2gl\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l},$$

resp.

$$v(s) = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Rovnost

$$2\sqrt{gl}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\sin\frac{s+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-s}{2l}}}, \qquad s(t_0) = s_0,$$

integrujeme přes interval $\langle t_0, t\rangle$, resp. $\langle s_0, s\rangle$:

$$2\sqrt{gl}(t - t_0) = \int_{s_0}^{s}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\sin\frac{\sigma+s_0}{2l}\sin\frac{s_0-\sigma}{2l}}} = \Psi(s).$$

Integrál $\Psi(s)$ nelze stanovit pomocí elementárních funkcí. Funkce $s = s(t)$ je touto rovností

$$\Psi(s) = 2\sqrt{gl}(t - t_0)$$

dána implicitně, tj.

$$s(t) = \Psi^{-1}(2\sqrt{l}(t - t_0)).$$

Pokud v integrálu užijeme aproximaci $\sin z \approx z$ (linearizace), potom z rovnosti

$$2\sqrt{gl}(t-t_0) = \int\limits_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{\frac{\sigma+s_0}{2l}\,\frac{s_0-\sigma}{2l}}} = 2l\int\limits_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{s_0^2-\sigma^2}}$$

dostaneme

$$\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0) = -\arccos\frac{s}{s_0},$$

neboli

$$s(t) = s_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0) =, \quad v(t) = -\sqrt{\frac{g}{l}}s_0\sin\sqrt{\frac{g}{l}}(t-t_0).$$

Výchylka je tedy periodickou funkcí času s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Závěr: Obecně závislost výchylky $s(t)$ houpačky na čase **není** periodickou funkcí času.
Dále jsme získali poznatek, že výsledek získaný aproximací $\sin z \approx z$ je řešení linearizovaného modelu pohybového zákona ve tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -mg\alpha(t) = -mg\frac{s(t)}{l}.$$