Úlohy pro (1,2,3,4) jsou velmi zjednodušené speciální důsledky matematických modelů procesů proudění tekutin. Především jde o důsledky bilančních principů formulovatelných takto: časová změna stavové funkce $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,t)$ na každém úseku $\langle x_1, x_2\rangle$ je rovna prostorové změně tokové funkce $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ na odpovídajícím časovém úseku $\langle t_1, t_2\rangle$, tj.

$$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{q}(x,t_2) - \mathbf{q}(x,t_1)]\, dx = \\ &\int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{f}(\mathbf{q}(x_1,t)) - \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_2,t))]\, dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Lokálním důsledkem (5) je

$$\mathbf{q}_t = -[\mathbf{f}(\mathbf{q})]_x. \tag{6}$$

Např. v (1) je $f(q) = aq$.

Pro procesy ve více prostorových dimenzích lze bilanční princip zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_B} [\mathbf{q}(\mathbf{x},t_2) - \mathbf{q}(\mathbf{x},t_1)]\, d\mathbf{x} = \\ &-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_B} \mathbf{f}(\mathbf{q}(\mathbf{x},t))\mathbf{n}(\mathbf{x})\, ds\, dt, \end{aligned} \tag{7}$$

kde $\mathbf{q}$ je (vektorová) stavová funkce, $\mathbf{f}$ je (vektorová) toková funkce, $\Omega_B \subset \mathbb{R}^3$ je libovolný bilanční sektor z oblasti $\Omega$, v níž probíhají popisované procesy. Lokálním důsledkem (7) je

$$\mathbf{q}_t = -\mathrm{div}\, \mathbf{f}(\mathbf{q}). \tag{8}$$

Při přechodu k lokálnímu tvaru se obvykle předpokládá spojitost, resp. hladkost funkce $\mathbf{q}$. Pokud však řešení úloh definujeme jako funkci, která splňuje bilanční rovnost typu (5), resp. (7), pak tento předpoklad nepotřebujeme. Pak můžeme připustit i tzv. zobecněná řešení (rázové vlny, vlny zředění, kontaktní nespojitosti). V případě nelineárních úlohech může být řešení nehladké i v případě, že počáteční podmínka hladká je.

## 2. Diferenční aproximace založená na integrální formulaci

Chceme popisovat vývoj metod především pro řešení nelineárních úloh pro rovnice (6) a (8). Jak bude z dalšího výkladu patrné, metoda konečných objemů v sobě obsahuje bilanční princip vycházející z integrální rovnosti (5), resp. (7). (Pomineme vývoj metod pro lineární úlohy a nebudeme věnovat pozornost ani numerickým problémům s nimi spojeným, např. lineární Richtmyerově stabilitě.)

Pro případ jedné prostorové dimenze zavedeme následující diskretizaci

$$x_j = j\Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad \Delta x > 0, \quad t_n = n\Delta t, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \Delta t > 0,$$

$$x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2,$$

a označíme

$$\mathbf{Q}_j^n \approx \mathbf{q}_j^n = \mathbf{q}(x_j, t_n),$$